MINISTERUL EDUCAȚIEI
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2022

CLASA a VII-a

Problema 1. Fie I punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului ABC. Punctele D, E și F sunt mijloacele segmentelor IA, IB, respectiv IC, iar G, H și J sunt picioarele perpendicularelor duse din punctul I pe laturile AB, BC, respectiv CA.

Demonstrați că punctele D, E, F, G, H și J sunt conciclice dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Problema 2. Suma a n numere întregi consecutive este egală cu 2022. Determinați valorile posibile ale numărului natural nenul n.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie a, b și c trei numere reale strict pozitive.

a) Dacă $a^2 + ab + ac$, $b^2 + ba + bc$ și $c^2 + ca + cb$ sunt numere raționale, demonstrați că $a^2 + b^2 + c^2$ este tot un număr rațional.

b) Arătați că există există $a, b, c > 0$ pentru care $a^2 + ab + bc$, $b^2 + bc + ca$ și $c^2 + ca + ab$ sunt numere raționale, însă $a^2 + b^2 + c^2$ este un număr irațional.

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Punctul D este piciorul înălțimii din A, iar M este mijlocul ipotenuzei BC.

Spunem că un punct X situat în interiorul triunghiului ABC este *remarcabil* dacă $AB = BX$, iar bisectoarea unghiului CXD trece prin punctul M.

a) Știind că există cel puțin un punct remarcabil, demonstrați că unghiul ABC are măsura de $60°$.

b) Dacă unghiul ABC are măsura de $60°$, arătați că orice punct situat pe arcul mic AM al cercului de centru B și rază AB este remarcabil.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.