Ministerul Educației

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ 1902-2022

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2022

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie e elementul neutru al monoidului $(M, \cdot)$ şi $a \in M$ un element inversabil. Arătaţi că:

a) Mulţimea $M_a = \{x \in M \mid ax^2a = e\}$ este nevidă;

b) Dacă $b \in M_a$ este inversabil, atunci $b^{-1} \in M_a$ dacă şi numai dacă $a^4 = e$;

c) Dacă $(M_a, \cdot)$ este monoid, atunci $x^2 = e$, pentru orice $x \in M_a$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $H \neq G$ un subgrup cu proprietatea că $x^2 = y^2$, pentru orice $x, y \in G \setminus H$. Demonstraţi că $(H, \cdot)$ este grup comutativ.

Problema 3. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ definim

$$I_n = \int_0^\pi \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \ldots \cdot \cos(nx)\, dx.$$

Să se determine valorile lui n pentru care $I_n = 0$.

Problema 4. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie strict monotonă. Demonstraţi că pentru orice $c \in I$ există $a, b \in I$ astfel încât $c \in (a, b)$ şi

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.