Ministerul Educației

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2022

CLASA a XI-a

Problema 1. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\inf_{x>a} f(x) = g(a) \text{ şi } \sup_{x<a} g(x) = f(a),$$

oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$. Ştiind că f are proprietatea lui Darboux, arătaţi că funcţiile f şi g sunt continue şi egale.

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel ca $A^2 + B^2 = O_3$. Arătaţi că $\det(aA + bB) = 0$, pentru oricare numere reale a şi b.

Problema 3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit în mod recurent prin $x_1 = 1$ şi

$$x_{n+1} = \frac{x_1}{n+1} + \frac{x_2}{n+2} + \ldots + \frac{x_n}{2n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm şirul $(y_n)_{n\geq 1}$, cu $y_n = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că:

a) $x_{n+1}^2 < \dfrac{y_n}{2}$ şi $y_{n+1} < \dfrac{2n+1}{2n+2} y_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Problema 4. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, unde $n \geq 2$. Notăm cu m numărul de elemente ale mulţimii $\left\{\operatorname{rang}(A^k) - \operatorname{rang}(A^{k+1}) \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$. Arătaţi că $n \geq \dfrac{m(m+1)}{2} - 1$.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.