Colegiul Naţional „Constantin Carabella” Târgovişte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
SSMR Filiala Dâmboviţa

Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte

Concursul de Matematică “Cezar Ivănescu”

Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 05 mai 2018

CLASA a XII-a

Subiectul 1. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, avem:

$$\int_{1+\frac{1}{n}}^{n} \frac{1+\ln x}{(x+\ln x)^2}dx < \frac{1}{2}\ln\, n + \frac{1}{4}\ln(\ln\, n).$$

Cristinel Mortici

Subiectul 2. Dacă $f\colon [0,1] \to R$ este o funcție continuă și $\int_0^1 f(x)dx = 1$, atunci există $c \epsilon (0,1)$ astfel încât

$$f(c) = 2c$$

Subiectul 3. Să se demonstreze că într-un grup *G* cu *2n* elemente, unde *n* este număr impar, există cel mult *n* elemente de ordinul 2.

Notă: Timp de lucru 120 minute. Se acordă câte 10 puncte pentru fiecare subiect rezolvat corect, 1 punct fiind din oficiu.

Concursul de Matematică"Cezar Ivănescu"
Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 5 mai 2018
Barem orientativ - clasa a XII-a

SUBIECTUL 1.

$\int_{1+\frac{1}{n}}^{n} \frac{1+lnx}{(x+\ln x)^2} dx < \frac{1}{4} \int_{1+\frac{1}{n}}^{n} \frac{1+lnx}{xlnx} dx =$ 2p

$= \frac{1}{4} (\ln(xlnx) \Big/_{1+\frac{1}{n}}^{n} =$ 2p

$< \frac{1}{4} (\ln(n\ln n) + \ln n) =$ 3p

$= \frac{1}{4} \ln(n^2 \ln n) =$ 1p

$= \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{4} \ln(\ln n)$ 1p

Oficiu 1p

SUBIECTUL 2. Fie $F: [0,1] \to R, F(x) = \int_0^x f(t)dt$

Funcția $g: R \to R, g(x) = F(x) - x^2$ 1p

g îndeplinește condițiile teoremei lui Rolle pe [0,1] 3p

Există $c \in (0,1)$ astfel ca $g'(c) = 0$ 3p

Finalizare 2p

Oficiu 1p

Sau $\int_0^1 [f(x) - 2x]dx = 0$, etc. cu un barem adaptat.

SUBIECTUL 3. Fie $H = \{a_1, a_2, \dots \dots . a_k\}$ mulțimea elementelor de ordinul 2. Presupunem k>n..2p

Dacă $i \neq j, ord(a_i a_j) \neq 2$, pentru că altfel $a_i a_j = a_j a_i$ și atunci $K = \{e, a_i, a_j, a_i a_j\}$ este subgrup, deci 4/2n. Contradicție. 3p

Fie $L = \{a_1 a_2, a_1 a_3, \dots \dots, a_1 a_k\}$. $K \cap L = \emptyset$ 2p

$|H| \geq n + 1$ $și$ $|L| \geq n$. Contradicție 2p

Oficiu 1p