



**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023
Secțiunea H1**



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

Filiera tehnologică – toate profilurile

Clasa a XII –a

Subiectul 1.

Se consideră mulțimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

- Arătați că, dacă $X \in A$ și $Y \in A$, atunci $X + Y \in A$.
- Demonstrați că, dacă $X \in A, Y \in A$ și $XY = O_2$, atunci $X = O_2$ sau $Y = O_2$.
- Admitem cunoscut faptul că A este inel în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor. Determinați elementele inversabile ale acestui inel.

Subiectul 2.

Pentru a, b din mulțimea $M = [0, \infty)$ se definește operația $a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$.

- Arătați că pentru orice $a, b \in M$, rezultă $a * b \in M$.
- Demonstrați că legea de compoziție "*" este asociativă.
- Determinați $a \in M$ astfel încât $\underbrace{a * a * a * \dots * a}_{\text{de } 2023 \text{ ori } a} = 2a$.

Subiectul 3.

Se consideră funcțiile $f, F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}, F(x) = a \ln(x+1) + b \ln(x^2+1) + c \cdot \arctg x$.

- Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția F să fie o primitivă a funcției f .
- Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.
- Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

Subiectul 4.

Mașinile folosite de o anumită firmă de curierat consumă motorină. Notăm cu $M(t)$ cantitatea de motorină (exprimată în litri) consumată de o mașină, începând de luni, ora 0:00 și până la momentul t , unde $t \in [0, 7]$. Momentul 7 corespunde zilei de duminică, ora 24:00 (astfel, intervalele $[0, 1], [1, 2], [2, 3], \dots, [6, 7]$ corespund zilelor de luni, marți, ..., duminică). Presupunem că funcția $M : [0, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă, cu $M(0) = 0$ și $M'(t) = (t^2 + 1)e^{4-t}, t \in [0, 7]$.

- Demonstrați că $F(x) = -(x^2 + 2x + 3)e^{4-x}, x \in \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 1)e^{4-x}$.
- Demonstrați că $M(t) = 3e^4 - (t^2 + 2t + 3)e^{4-t}, \forall t \in [0, 7]$.
- Arătați că în ziua de luni o mașină consumă mai puțin de 53 l de motorină.
- Stabiliți în ce zi a săptămânii se realizează cel mai mare consum de motorină.

În calcule, considerați $2,7 < e < 2,8$.