MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie $SABCD$ o piramidă având ca bază paralelogramul $ABCD$. Pe muchiile SA, SB, SC și SD se consideră punctele M, N, P, respectiv Q astfel încât $MNPQ$ să fie un paralelogram.

a) Dacă $ABCD$ este un romb, arătați că $MNPQ$ este un romb.

b) Dacă $ABCD$ este un dreptunghi, arătați că $MNPQ$ este un dreptunghi.

Gazeta Matematică

Problema 2. Un triplet (a, b, c) de numere întregi se numește *artistic* dacă numărul $\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$ este întreg.

a) Determinați numerele întregi n pentru care tripletele $(n, n+1, n+3)$ sunt artistice.

b) Dacă (x, y, z) este un triplet artistic, arătați că numărul $\dfrac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z}$ este întreg.

Problema 3. Determinați numerele naturale nenule a, b și c care verifică simultan condițiile:

(i) $(a^2+b^2)(c^2+2023^2) = (ab+2023c)^2$;

(ii) $(a^2+2023^2)(b^2+c^2) = (2023a+bc)^2$;

(iii) cel mai mare divizor comun al numerelor a, b, c și 2023 este egal cu 1.

Problema 4. Se consideră un tetraedru $ABCD$ în care $\widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\widehat{DAB} = 180°$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DAB}$, iar proiecția vârfului D pe planul (ABC) este ortocentrul triunghiului ABC. Demonstrați că $AB = AC$ și $DB = DC$.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.