Ministerul Educației
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu proprietatea că

$$(f''(x) - f(x)) \cdot \operatorname{tg}(x) + 2 \cdot f'(x) \geq 1\,, \qquad \text{pentru orice } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Arătați că

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin(x)\, dx \geq \pi - 2\,.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e, iar H și K două subgrupuri proprii ale lui G, cu proprietatea că $H \cap K = \{e\}$ și că $(G \setminus (H \cup K)) \cup \{e\}$ este parte stabilă în raport cu operația din G. Arătați că $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$.

Problema 3. Fie $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă.
a) Arătați că

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x^n)\, dx = f(0)\,.$$

b) Dacă $f(0) = 0$ și f este derivabilă la dreapta în 0, arătați că limitele

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{f(x)}{x}\, dx \qquad \text{și} \qquad \lim_{n \to \infty} \left(n \cdot \int_0^1 f(x^n)\, dx\right)$$

există, sunt finite și egale.

Problema 4. Pe mulțimea $A = [0, \infty)$ a numerelor reale nenegative se consideră trei funcții $f, g, h : A \longrightarrow A$ și operația binară $* : A \times A \longrightarrow A$, definită prin

$$x * y = f(x) + g(y) + h(x) \cdot |x - y|\,, \qquad \text{pentru orice } x, y \geq 0.$$

Dacă $(A, *)$ este un monoid comutativ,
a) arătați că funcția h este continuă pe A;
b) determinați funcțiile f, g, h.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.