



**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

**ETAPA JUDEȚEANĂ
26 martie 2022**

**Filiera tehnologică – toate profilurile
Clasa a XI-a**

Subiectul 1.

Se consideră matricele $A(a) = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{2} & \frac{a-1}{2} \\ \frac{a-1}{2} & \frac{a+1}{2} \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- a) Arătați că $A(a) \cdot A(b) = A(ab)$, $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- b) Determinați $A^n(a)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- c) Demonstrați că $\det A(2) + \det A^2(2) + \det A^3(2) + \dots + \det A^{2022}(2) < 2^{2023}$.

Subiectul 2.

Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

- a) Stabiliți D , domeniul maxim de definiție a funcției f .
- b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 2$.
- c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right]^x$.

Subiectul 3.

Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$.

- a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, $x \in (0, \infty)$.
- b) Demonstrați că $f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2022) \in (0, 1)$.
- c) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{f(x)}$, știind că aceasta trece prin punctul $A(-1, 0)$.

Subiectul 4.

O masă de biliard este reprezentată schematic într-un reper cartezian (xOy) printr-un dreptunghi $OABC$ astfel încât $A \in Oy$, $C \in Ox$, $OA = 2a$, $OC = a$ și $a \in (0, \infty)$.

- a) Determinați coordonatele punctului P în care este situată o bilă albă știind că acesta se află la distanța $\frac{a}{2}$ față de AB și la distanța $\frac{a}{2}$ față de BC .
- b) Determinați coordonatele punctului M de pe latura BC a mesei, în care trimitem bila P astfel încât ea să ricoșeze în buzunarul din punctul O .
- c) Determinați cel mai mic număr întreg a pentru care aria triunghiului determinat de poziția inițială a bilei, punctul M și buzunarul O este un număr natural.