COMENTARII ÎN LEGĂTURĂ CU ANUMITE PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE ÎN GAZETA MATEMATICĂ

PARTEA A II A

AUTOR:PROFESOR COTEA MARIANA EUGENIA

APRILIE 2019

PROBLEMA 1

În G.M. nr 6/2006 apare problema C:2970/pag 48 propusă pentru concursul anual al rezolvitorilor,fiind adresată elevilor claselor a IX a și a Xa.Redau mai jos enunțul acestei probleme:

,,Să se arate că în orice triunghi în care A,B,C$\in (0;\frac{\pi}{2}]$ are loc inegalitatea $\sqrt{sinA}+\sqrt{sinB}+\sqrt{sinC}>2$,,

Voi încerca să reformulez problema în două direcții:completare și generalizare.Enunțul reformulat este următorul:

,,Să se arate că în orice triunghi ABC au loc următoarele inegalități:

1)$2\sqrt{sin\alpha}+\sqrt{sin2\alpha}\le\sqrt{sinA}+\sqrt{sinB}+\sqrt{sinC}\le 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$,pentru orice

A,B,C$\in (0;\alpha]$ $cu\ \frac{\pi}{3}\le\alpha<\frac{\pi}{2}$

2) $2\sqrt{sin\alpha}<\sqrt{sinA}+\sqrt{sinB}+\sqrt{sinC}\le 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $pentru\ oricare\ ar\ fi$

A,B,C$\in (0;\alpha], cu\ \frac{\pi}{2}\le\alpha<\pi$ unde $2\sqrt{sin\alpha}$ $este\ margine\ inferioar\breve{a}$ a mulțimii valorilor expresiei E(A,B,C)=$\sqrt{sinA}+\sqrt{sinB}+\sqrt{sinC}$

3)0$<\sqrt{sinA}+\sqrt{sinB}+\sqrt{sinC}\le 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$pentru oricare A,B,C€(0;π) unde 0 este margine inferioară a mulțimii valorilor expresiei E(A,B,C)

OBSERVAȚIE:Înainte de a începe rezolvarea este important,după părerea mea ,ca în cazul inegalităților stricte să se precizeze dacă numărul despre care se solicită să se arate că este minorant (sau majorant)al mulțimii valorilor unei expresii date este margine inferioară(sau margine superioară) a respectivei mulțimi de valori.

Amintesc că marginea inferioară a unei mulțimi este cel mai mare element al mulțimii minoranților iar marginea superioară a unei mulțimi este cel mai mic element al mulțimii majoranților.

ETAPA I

Inegalitatea $\sqrt{sinA}+\sqrt{sinB}+\sqrt{sinC}\le 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ se poate demonstra rapid folosind instrumentele analizei matematice.În acest sens utilizăm funcția f: (0;π)$\rightarrow R, f(x)=\sqrt{sinx}$.Se obține f''(x)=$\frac{-2sin^2x-cos^2x}{4sinx\sqrt{sinx}}$.

Deoarece f''(x)<0 pentru orice x din intervalul (0;π) rezultă că funcția f este concavă .Aplicând proprietatea unei funcții concave obținem:$\frac{\sqrt{sinA}+\sqrt{sinB}+\sqrt{sinC}}{3}\le\sqrt{sin\frac{A+B+C}{3}}\Leftrightarrow\sqrt{sinA}+\sqrt{sinB}+\sqrt{sinC}\le 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.Deoarece intenția este să adresăm problema și elevilor care nu au studiat analiza matematică voi propune o altă rezolvare a acestei inegalități utilizănd geometria sintetică.În acest scop vom trece de la forma trigonometrică a expresiei la o formă algebrică utilizând teorema sinusului:$\sqrt{sinA}+\sqrt{sinB}+\sqrt{sinC}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2R}}$.În continuare vom considera următoarea configurație geometrică compusă dintr-o parte fixă(un cerc de centru O și rază R; B,C puncte ale cercului) și o parte mobilă și anume punctul A mobil pe arcul mare BC.Dacă notăm cu A_1 mijlocul arcului mare BC putem cosidera din motive de simetrie că vărful mobil al triunghiului ABC se mișcă pe jumătate din arcul mare BC, fie arcul A_1B această jumătate. Din modul de construcție al acestei cofigurații obținem că a și măsura unghiului A sunt constante în timp ce b,c și măsurile unghiurilor Bși C sunt variabile.

Aplicând teorema medianei și formule pentru aria triunghiului obținem:$\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2=b+c+2\sqrt{bc}=\sqrt{b^2+c^2+2bc}+2\sqrt{bc}$=

=$\sqrt{\frac{4m_a^2+a^2}{2}+2\frac{h_A\cdot a}{sinA}}+2\sqrt{\frac{h_A\cdot a}{sinA}}$ unde am notat cu m_a=mediana din A și cu h_A=înălțimea din A.

Dacă notăm cu M mijlocul laturii fixe BC obținem că O este între A_1 și M.În timpul mișcării punctului A de la A_1 către B mediana AM se micșorează pentru că este latură a triunghiului OAM unde OA=R=ct, OM=ct iar măsura unghiului AOM scade în timpul mișcării.Tot în sensul scăderii în timpul deplasării lui A de la A_1 către B evoluează și înălțimea h_A prin urmare suma:

$\sqrt{b}+\sqrt{c}$ atinge un maxim pentru A=A_1 dică pentru cazul în care

triunghiul ABC este isoscel de bază BC.Se obține:

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \sqrt{a}+2\sqrt{BA_1}$. (1) Utilizând succesiv inegalitatea generalizată a mediilor oținem:

$\sqrt{a}+2\sqrt{BA_1} \leq \sqrt{3(a+2BA_1)} \leq \sqrt{3\sqrt{3(a^2+2BA_1^2)}}$. (2) Notând cu A_2 punctul diametral opus lui A_1 și aplicând în triunghiul A_1A_2B teorema catetei și teorema înălțimii obținem că:$a^2 = 4A_1M \cdot (2R - A_1M)$ și $BA_1^2 = A_1M \cdot 2R$ (3)

Din (1),(2),(3) obținem că

:$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \sqrt{3\sqrt{3 \cdot 4 \cdot (3A_1M \cdot R - A_1M^2)}}$

Când M este mobil pe segmentul OA_2 obținem din analiza funcției de variabilă A_1M că expresia dintre paranteze admite maxim pentru

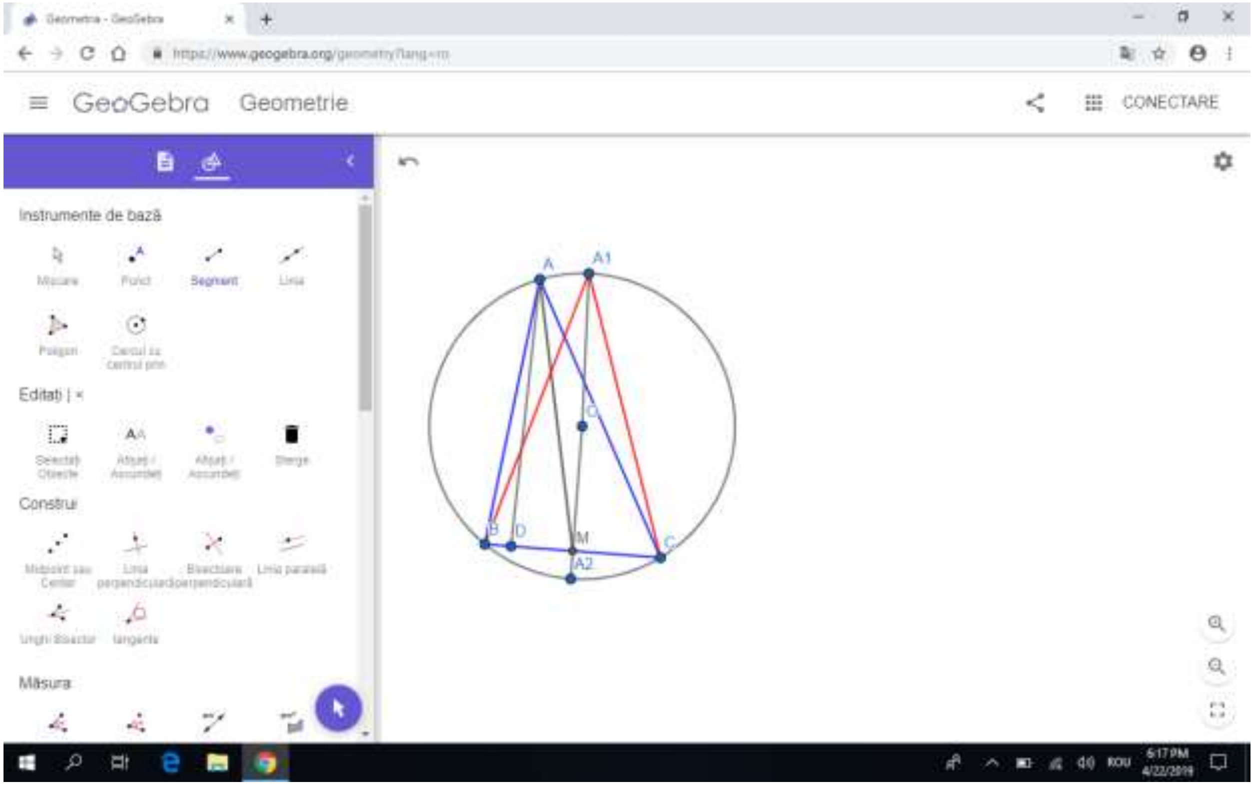
$A_1M=\frac{3R}{2}$ adică pentru triunghiul echilateral înscris în cercul de rază R.

Obținem prin urmare :

$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2R}} \leq \frac{\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot 9R^2}}}{\sqrt{2R}} = 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ sau revenind la forma trigonometrică:

$\sqrt{sinA}+\sqrt{sinB}+\sqrt{sinC} \leq 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ (c.c.t.d.)

Ilustrăm mai jos configurațiile utilizate:



-ETAPA A II A

Pentru demonstrarea primei inegalități în cazul :

A,B,C$\in (0;\alpha]$ $cu\,\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ obținem , utilizând cofigurația geometrică propusă în etapa I,$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq \sqrt{a}+\sqrt{A_3B}+\sqrt{A_3C}$ (*) unde A_3 se află pe arcul mic A_1B pe care are loc deplasarea vârfului mobil A al triunghiului ABC astfel încât $m(\sphericalangle A_3BC)=\alpha$.S-a utilzat faptul că în timpul deplasării vârfului mobil A de la A_1 către B suma $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ se micșorează atingând un minim în A_3 datorită condiției impuse asupra măsurilor unghiurilor triunghiurilor de a fi mai mici decât α.

În continuare menținem fixă latura A_3C căreia i se opune unghiul de măsură α și deplasăm punctul B pe jumătate din arcul mare A_3C fie această jumătate CB_1 unde B_1 este mijlocul arcului mare A_3C. Dacă această deplasare o cosiderăm de la B_1 către C obținem printr-un raționament similar cu cel făcut în etapa I că suma

$\sqrt{a}+\sqrt{A_3B}$ atinge un minim când B ocupă pozița pe care o voi nota cu B_2 astfel încât măsura unghiului A_3CB_2 este α.Prin urmare

$\sqrt{a}+\sqrt{A_3B} \geq \sqrt{B_2C}+\sqrt{B_2A_3}$(**)

Din relațiile (*) și (**) obținem

:$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq \sqrt{B_2C}+\sqrt{B_2A_3}+\sqrt{A_3C}$ unde coardele A_3C și B_2A_3 se opun la unghiuri de măsură α iar coarda B_2C se opune unghiului de măsură $\pi-2\alpha$. Avem în cosecință:

$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2R}} \geq \frac{\sqrt{B_2C}+\sqrt{B_2A_3}+\sqrt{A_3C}}{\sqrt{2R}} \Leftrightarrow \sqrt{sinA}+\sqrt{sinB}+\sqrt{sinC} \geq \sqrt{sin2\alpha}+2\sqrt{sin\alpha}$ (c.c.t.d)

ETAPA AIII A

Pentru demonstrarea primei inegalități în cazul în care $A,B,C \in (0;\alpha]\ cu\ \frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$ vom raționa ca în prima parte a etapei a II a

obținându-se $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq \sqrt{a}+\sqrt{A_3B}+\sqrt{A_3C}$ unde măsura unghiului A_3BC este α.Menținem în continuare coarda A_3C fixă și deplasăm vârful B pe jumătate din arcul mare A_3C de la B_1 către C unde B_1 reprezintă mijlocul arcului mare A_3C.Deoarece un triunghi nu poate avea două unghiuri drepte sau două unghiuri obtuze și cum măsura lui B este $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$ obținem că vârful B poate ocupa orice poziție pe arcul B_1C, pentru B=C obținându-se un triunghi degenerat.

Din inegalitatea triunghiului avem $a+A_3B > A_3C$.Pe de altă parte din $\sqrt{a}+\sqrt{A_3B} > \sqrt{a+A_3B} > \sqrt{A_3C}$ obținem că :

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} > 2\sqrt{A_3C}$.Se poate arăta că $2\sqrt{A_3C}$ este margine inferioară a mulțimii valorilor expresiei $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ plecând de la observația că marginea inferioară a mulțimii valorilor expresiei

$a+A_3B$ este A_3C.Se obține:

$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2R}} > 2\frac{\sqrt{A_3C}}{\sqrt{2R}} \Leftrightarrow \sqrt{sinA}+\sqrt{sinB}+\sqrt{sinC} > 2\sqrt{sin\alpha}$ cu $2\sqrt{sin\alpha}$ margine inferioară a mulțimii valorilor expresiei E(A,B,C) ceea ce trebuia demonstrat.

ETAPA AIV A

Pentru demonstrarea primei inegalități în cazul în care

A,B,C$\in(0;\pi)$ vom utiliza aceeași configurație geometrică folosită în etapele anterioare cu singura observație că deoarece nu mai există un maxim impus pentru A,B,C punctul mobil A se va deplasa pe tot arcul A_1B de la A_1 către B pentru A=B obținându-se un triunghi degenerat.Se obține că $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}>2\sqrt{a}$ deoarece din inegalitatea tiunghiului avem b+c>a și$\sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{b+c}>\sqrt{a}$.Deoarece a poate lua orice valoare pozitivă mai mica sau egală cu 2R și marginea infeioară a mulțimii valorilor lui b+c este a obținem că marginea inferioară a mulțimii valorilor expresiei

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ *este* 0.În concluzie $\sqrt{sinA}+\sqrt{sinB}+\sqrt{sinC}>0$ cu 0 margine inferioară a mulțimii valorilor expresiei E(A,B,C)

PROBLEMA 2

Următoarea problemă este o problemă de loc geometric care apare în GM 1/2001 la pagina 40 la numărul24450.

Enunțul problemei este următorul:

,,Fie ABC un triunghi isoscel(AB=AC).Să se determine locul geometric al punctelor M din planul triunghiului cu proprietatea

MA^2-MB·MC=AB^2 ,,

OBSERVAȚIE:După rezolvarea acestei probleme ne vom gândi și la reformulări ale problemei în contexte ușor schimbate.

REZOLVARE:Pentru început voi rescrie proprietatea din enunț a punctelor locului geometric:

MA^2-MB·MC=$AB^2$$\Leftrightarrow MA^2-AB^2=MB\cdot MC \Leftrightarrow (MA-AB)(MA+AB)=MB\cdot MC$ (*)

Din forma (*) a acestei proprietăți se deduce MA$\geq AB$

Vom considera în continuare cercul de centru A și de rază egală cu AB,fie acesta C(A;r=AB).

CAZUL I: M€L_g(am notat cu L_g locul geometric căutat) și MA=AB⟺ $M = B$ sau $M = C$.Am utilizat proprietatea (*).Se obține că B,C sunt puncte ale locului geometric.

CAZUL II Analizăm ce se întâmplă când M€L_g și MA>AB ceea ce înseamnă că M€Ext C(A;r=AB).

Fie prin urmare în cele ce urmează un punct M al locului geometric care se află în exteriorul cercului de centru A și rază AB.Dacă notăm cu P și Q intesecțiile secantei AM cu cercul dat , P între A și M , obținem utilizând (*) :MP·MQ=MB·MC=puterea punctului M față de cerc.(**)

Considerăm mai multe situații legate de poziția lui M în exteroirul cercului considerat:

1) Dacă M$\in ExtC(A;r = AB) \cap BC$ atunci B,C fiind intersecțiile secantei MB cu cercul obținem că MB·MC este puterea punctului M față de cerc prin urmare orice punct din mulțimea BC-$[BC]$ este punct al locului geometric căutat.

2) Dacă M aparține Ext C(A;r=AB) intersectat cu semiplanul deschis limitat de dreapta BC care conține punctul A, vom considera secanta MC care intersectează cercul a doaua oară în S cu S între M și C(similar se raționează când S se află pe cealaltă secantă între M și B).Deoarece măsura unghiului BSC este mai mică de 90^o(fiind ½ din măsura arcului micAB) obținem că unghiul BSM este obtuz prin urmare în triunghiul MBS avem MB >MS de unde MB·MC>MS·MC.Acest lucru înseamnă că MB·MC>puterea punctului M față de cerc prin urmare M nu este punct al locului geometric pentru că nu verifică proprietatea echivalentă (**) a punctelor locului geometric.

3) Dacă M aparține Ext C(A;r=AB)intersectat cu semiplanul deschis limitat de dreapta BC care nu conține punctul A și M un punct al locului geometric.Cel puțin una din secantele MC sau MB intersectează arcul mic BC într-un punct Q aflat între M și C sau între M și B.Presupunem Q între Mși C.

Deoarece M este punct al locului geometric rezultă că MB·MC=puterea punctului M față de cerc =MQ·MC de unde rezultă că MB=MQ deci triunghiul MBQ este isoscel de bază BQ.

Deoarece unghiul MQB este suplementul unghiului BQC obținem că măsura unghiului MQB este ½ din măsura arcului mic BC deci este constantă.În triunghiul isoscel MQB măsura unghiului BMQ este egală cu:

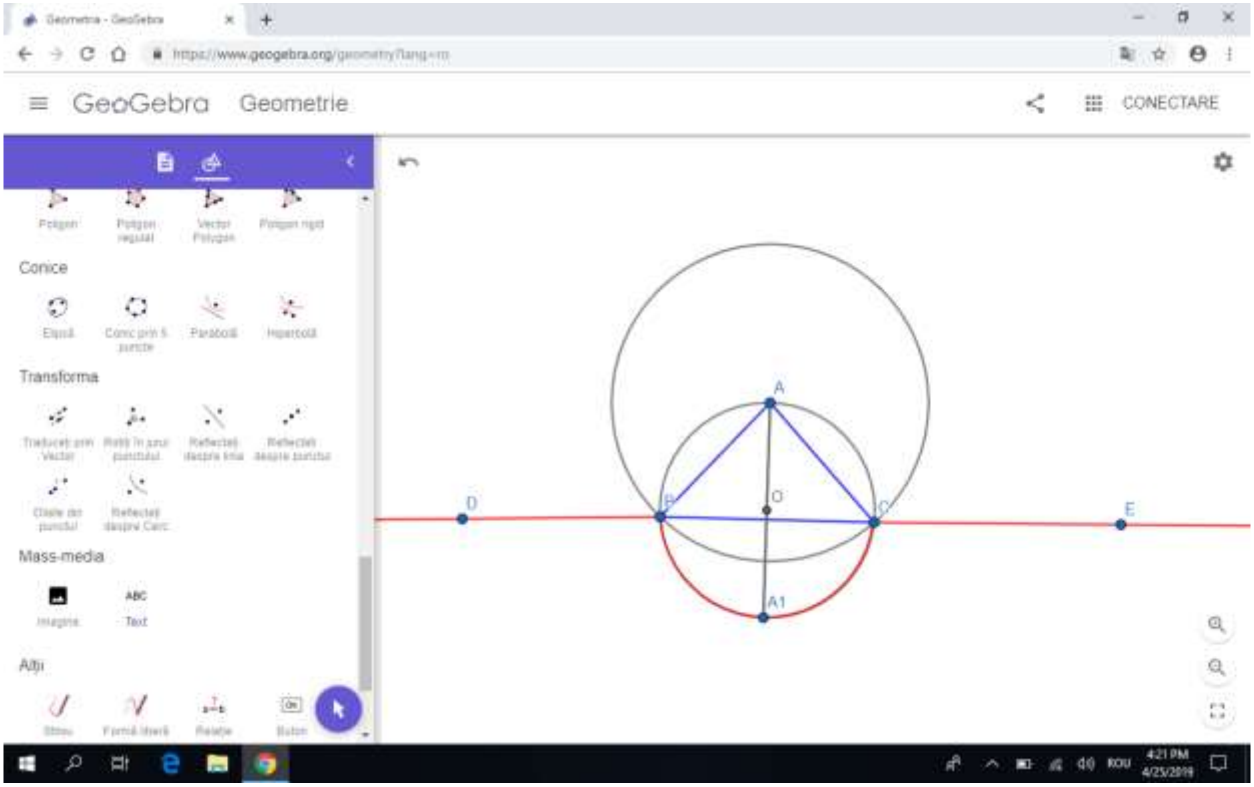
180^0-$2m(\sphericalangle MQB) = 180^0 - 2 \cdot \frac{m(BC)}{2} = 180^0 - m(\measuredangle BAC) = constant.$

Acest lucru înseamnă că locul geometric în acest caz este inclus în arcul de cerc cu capetele în B și C aparținând cercului circumscris triunghiului ABC și situat în zona care ne interesează.Se poate arăta că orice punct al acestui arc de cerc este punct al locului geometric concluzionând că în acest caz locul geometric se identifică cu respectivul arc de cerc(îl vom nota $\widehat{BA_1C}$ unde A_1 este punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului ABC.)

Analizând rezultatele obținute putem afirma că locul geometric căutat este următoarea reuniune:

$\widehat{BA_1C} \cup (BC - (BC))$

Ilustrăm mai jos locul geometric obținut:



Așa cum am anunțat la început putem să ne gândim la reformulări schimbând oarecum contextul.

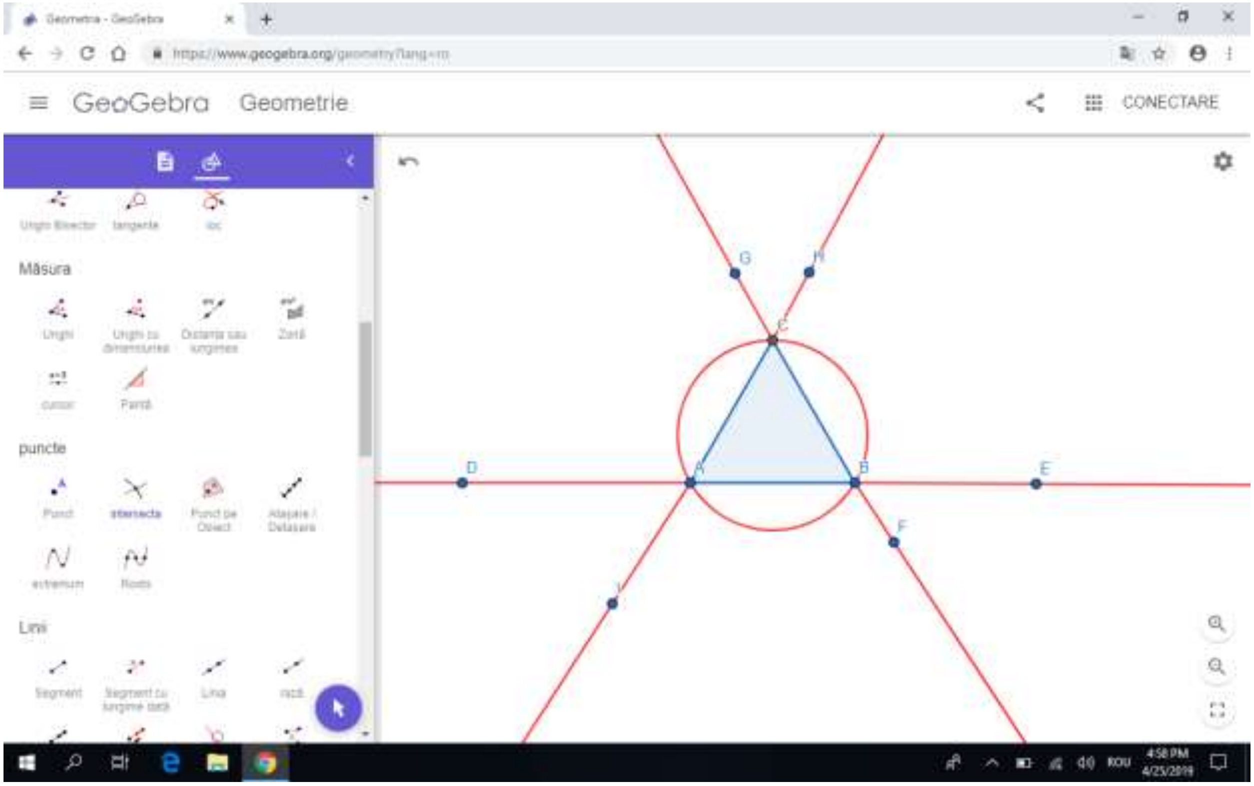
Exemplul 1)

Fiind dat un triunghi echilateral ABC determinați locul geometric al punctelor M din plan care au proprietatea că: $MA^2-MB\cdot MC=AB^2$ sau $MB^2-MA\cdot MC=BC^2$ sau $MC^2-MB\cdot MA=AC^2$

OBSERVAȚIE: În acest caz locul geometric se identifică cu:

$\overset{\frown}{BA_1C} \cup \overset{\frown}{AC_1B} \cup \overset{\frown}{AB_1C} \cup (BC-(BC)) \cup (AC-(AC)) \cup (AB-(AB))$ unde cu $A_1.B_1,C_1$ am notat punctele diametral opuse punctelor A,B,C în cercul circumscris triunghiului ABC.De fapt reuniunea celor trei arce reprezintă chiar cercul circumsris triunghiului echilateral ABC .Prin urmare locul gemetric căutat este cercul circumscris triunghiului ABC la care se reunesc 6 semidrepte ca în desenul de mai jos.

Desen:



Exemplul 2)

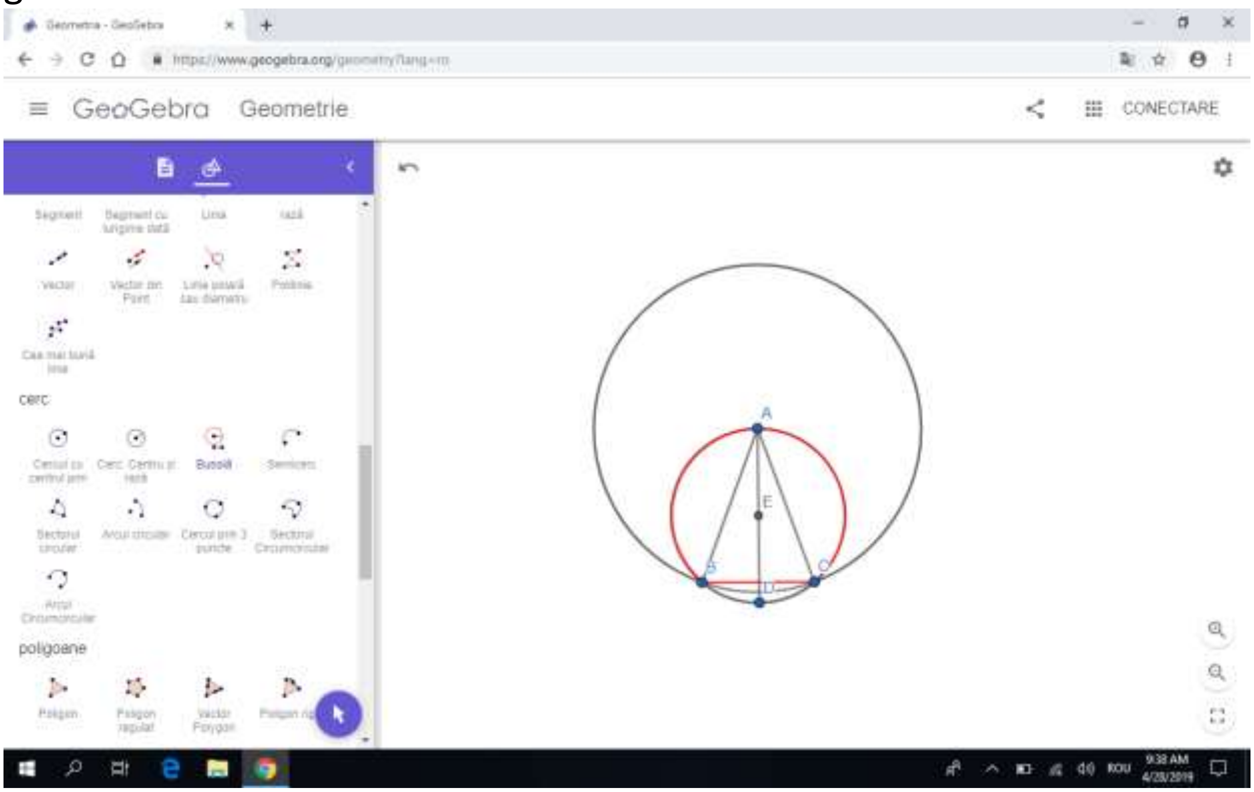
Fiind dat un triunghi isoscel ABC cu AB=AC determinați locul geometric al punctelor din plan pentru care:

$AB^2 - MB \cdot MC = MA^2$

OBSERVAȚIE:

În acest caz se poate demonstra, prin raționamente similare cu cele făcute pentru problema inițială ,că locul geometric este compus din latura BC și arcul BAC din cercul circumscris triunghiului ABC.Se utilizează faptul AB>MA sau AB=MA. Pentru AB>MA avem că M aparține interiorului cercului de centru A și rază AB iar proprietatea punctelor locului geometric exprimă faptul că produsul MB·MC este egal cu puterea punctului M față de cerc(cazul M interior cercului).

Ilustrăm mai jos locul geometric



EXEMPLUL 3

Fiind dat un triunghi isoscel ABC cu AB=AC determinați locul geometric al punctelor M din plan pentru care :

MA^2-MB·MC=AB^2 sau AB^2-MB·MC=MA^2

OBSERVAȚIE:

Se obține că locul geometric este compus din cercul circumscris triunghiului ABC și dreapta BC.Determinarea locului geometric se bazează pe rezultatele obținute la problema inițială și la problema propusă în cadrul exemplului 2

PROBLEMA 3

În G.M. nr.12/2002 apare următoarea problemă:

24806 ,,Fie a,b,c lungimile laturilor unui triunghi,a$\neq b \neq c \neq a$

Să se arate că:$\left|\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}\right| > \sqrt{6}-1$,,

OBSERVAȚIE:

1)Așa cum am precizat și în problema 1 în cazul inegalităților stricte propuse pentru a fi demonstrate este interesant de știut dacă minorantul(sau majorantul propus) este margine inferioară (sau margine superioară) a mulțimii valorilor expresiei din respectiva inegalitate.În cazul problemei de față voi arăta că $\sqrt{6}-1$ *nu este margine inferioară a* mulțimii valorilor expresiei E(a,b,c)=$\left|\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}\right|$

2)Pentru a ușura rezolvarea voi simplifica fiecare raport cu cel mai mic dintre a,b,c fie acesta b.Obținem că este suficient să arătăm că inegalitatea dată este adevărată pentru orice triunghi cu cea mai mică latură 1 ,celelalte două laturi fiind , după o renotare a și c.În cle ce urmează vom nota cu

E(a,c)=$\left|\frac{a}{a-1}+\frac{1}{1-c}+\frac{c}{c-a}\right|$ cu a ,c>1 unde 1,a,c sunt lungimile laturilor unui triuunghi.

REZOLVAREA PROBLEMEI:

Efectuând aducerea la același numitor obținem:

E(a,c)=$\left|\frac{c^2(1-2a)+c(3a-2)-2a^2+a}{(a-1)(1-c)(c-a)}\right|$ Considerând c variabil și a fix c,a>1 obținem că numărătorul fracției este negativ pentru orice valoare a lui c iar numitorul este negativ pentru c>a și pozitiv pentru c<a.

Prin urmare fracția este pozitivă pentru c>a și este negativă pentru c<a.În consecință:

E(a,c)=$\frac{a}{a-1}+\frac{1}{1-c}+\frac{c}{c-a}$,dacă c>a

E(a,c)=$-\frac{a}{a-1}-\frac{1}{1-c}-\frac{c}{c-a}$,dacă c<a

Analizăm în continuare funcția f: (1;a)$\cup(a;a+1)$→R dată prin f(x)=$\frac{a}{a-1}+\frac{1}{1-x}+\frac{x}{x-a}$.Din analiza semnului derivatei funcției date obținem: f'(x)>0 pentru x€(1;$\sqrt{a}$) și f'(x)<0 pentru

x€($\sqrt{a};a)\cup(a;a+1)$ și f'($\sqrt{a}$)=0

Distingem următoarele situații:

1) Dacă c>a cum f este descrescătoare pe intervalul (a;a+1) conform semnului derivatei pe acest interval obținem :

   f(c) >$\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a}+1+a$

2) Dacă c<a cum c>a-1 distingem două cazuri posibile:

   Cazul1)a-1>$\sqrt{a} \Leftrightarrow a^2-3a+1>0 \Leftrightarrow a\in(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\infty)$(am ținut cont că a este mai mare decât 1) obținem :

   f(c)$<\frac{a}{a-1}+\frac{1}{2-a}-a+1$; am ținut cont de faptul că derivata este negativă pe intervalul ($\sqrt{a}$;a)

   Cazul 2)a-1$\leq\sqrt{a}\Leftrightarrow$a€$(1;\frac{3+\sqrt{5}}{2}]$ (am ținut cont că a este mai mare decât 1) obținem f(c)$\leq f(\sqrt{a})\Leftrightarrow f(c)\leq\frac{a}{a-1}+\frac{2}{1-\sqrt{a}}$

Revenind la expresia care ne interesează obținem:

E(a,c)>$\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a}+1+a,\ dacă\ c>a$

E(a,c)$>-\frac{a}{a-1}-\frac{1}{2-a}+a-1,\ dacă\, c<a\ și\ a\in(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\infty)$

E(a,c)$\geq-\frac{a}{a-1}-\frac{2}{1-\sqrt{a}}\ \ dacă\ c<a\ și\ \ a\in(1;\frac{3+\sqrt{5}}{2}]$

Se constată că:

1)mulțimea valorilor expresiei $E_1(a)=\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a}+1+a=\frac{a^2-a+1}{a(a-1)}+1+a$

admite minorant pe 2 (deoarece a este mai mare decât 1)

2)mulțimea valorilor expresiei $E_2(a)=-\frac{a}{a-1}-\frac{2}{1-\sqrt{a}}$ pentru a$\in\left(1;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

admite un minim pentru a=$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.Efectuând calculele obținem că mulțimea valorilor expresiei admite minorant pe 1,62.

3)mulțimea valorilor expresiei $E_3(a)=--\frac{a}{a-1}-\frac{1}{2-a}+a-1$ pentru

a$\in\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$ admite un minim pentru soluția unică a_0 a ecuației

$\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}+1=0$(am utilizat derivata g' a funcției
g:$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\infty\right)\rightarrow R, dată\ prin\ g(x)=-\frac{x}{x-1}-\frac{1}{2-x}+x-1$)

Deoarece g'(2,883)<0 și g'(2,884)>0 obținem că unica soluție a_0 a ecuației de mai sus aparține intervalului (2,883;2,884).Pe de altă parte g(2,883)=1,484435… iar g(2,884)=1,484436…este de presupus $g(a_0)>1,48$ ceea ce se poate demonstra rezolvând inecuația $E_3(a)>1,48$.

Analizând cele trei cazuri constatăm că mulțimea valorilor expresiei E(a;c) admite margine inferioară pe $g(a_0)$€(1,48;1,4844..).În consecință $E(a;c)>g(a_0)>1,48$ .Revenind la forma inițială a expresiei obținem $\left|\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}\right|>g(a_0)>1.48$ unde așa cum am văzut minorantul 1,48 este foarte apropiat de marginea inferioară $g(a_0)$ a mulțimii valorilor expresiei E(a,b,c) față de cel propus de autor $\sqrt{6}$-1=1,44948….

PROBLEMA4

În G.M. 2006,pag.160 apare problema C 2991 care este propusă pentru Concursul anual al rezolvitorilor de probleme (nivel gimnazial).Enunțul acestei probleme este următorul:

,,Arătați că dacă n€N* atunci: $\sqrt{n+1}+\sqrt{3n-2}+\sqrt{8n+1}<6\sqrt{n}$

REZOLVARE:

Aplicând inegalitatea generalizată a mediilor obținem:

$\sqrt{n+1}+\sqrt{3n-2}+\sqrt{8n+1}\leq\sqrt{3(n+1+3n-2+8n+1)}$ de unde rezultă că $\sqrt{n+1}+\sqrt{3n-2}+\sqrt{8n+1}\leq 6\sqrt{n}$ cu precizarea că egalitatea nu se realizează pentru nici un n număr natural nenul deoarece numerele n+1,3n-2,8n+1 nu pot fi simultan egale.

În consecință $\sqrt{n+1}+\sqrt{3n-2}+\sqrt{8n+1}<6\sqrt{n}$ pentru orice număr natural nenul n (c.c.t.d.)

OBSERVAȚIE:Dacă inegalitatea de demonstrat ar fi apărut în forma echivalentă:$\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{3n-2}+\sqrt{8n+1}}{\sqrt{n}}<6$,pentru n număr natural nenul , ar fi fost interesant de știut care este marginea superioară a mulțimii valorilor expresiei E(n) (am notat cu E(n) expresia din membrul stâng al inegalității).În cele ce urmează vom determina această margine superioară.Deoarece E(n)=$\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{3-\frac{2}{n}}+\sqrt{8+\frac{1}{n}}$ vom analiza funcția f:(0:$\frac{3}{2}$) $\rightarrow R, dată\, prin\, f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{3-2x}+\sqrt{8+x}$.Din analiza lui f′ și f′′ se obține că există o unică soluție a ecuației f′(x)=0 pe care o vom nota x_0, cu $x_0\in(\frac{1}{5};\frac{1}{4})$ și f′(x)>0 pentru orice x€(0;x_0) iar f′(x)<0 pentru orice x€(x_0,$\frac{3}{2}$).Se obține că :

f(x)$\leq f(x_0)$ pentru orice x din domeniul de definiție al funcției.

Revenind la E(n) deoarece E(5)=f($\frac{1}{5}$)=$\sqrt{\frac{6}{5}}+\sqrt{\frac{13}{5}}+\sqrt{\frac{41}{5}}$=5,571460… și

E(4)=f($\frac{1}{4}$) = $\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{33}{4}}$ =5,571454… și $x_0\in(\frac{1}{5};\frac{1}{4})$ și f(x)≤f(x_0) obținem că E(n)$\leq E(5)\quad de\, unde E(n)\leq\sqrt{\frac{6}{5}}+\sqrt{\frac{13}{5}}+\sqrt{\frac{41}{5}}$=5,571460…

pentru orice n număr natural nenul.Am demonstrat astfel că mulțimea valorilor lui E(n) admite margine superioară care aparține mulțimii valorilor fiind cel mai mare element al mulțimii:E(5).

PROFESOR:COTEA MARIANA EUGENIA

APRILIE 2019

--