Claudiu Tamaş

Compendiu de formule matematice pentru Evaluarea Naţională

ISBN 978-973-0-36492-7

Bucureşti, 2022

Autor: Claudiu Tamaş

Tehnoredactare: Claudiu Tamaş

Copertă: Claudiu Tamaş

Toate drepturile asupra acestei document distribuit gratuit on-line aparţin ASOCIAŢIEI BUCUREŞTI PENTRU COPII DISLEXICI. Reproducerea integrală sau parţială a conţinutului acestui document distribuit gratuit on-line este interzisă fără acordul scris al asociaţiei. Acest material gratuit on-line poate fi utilizat în interesul personal al copiilor diagnosticaţi cu TSI, de către părinţi, profesori şi specialişti TSI din sistemul de învăţământ românesc. Comercializarea, modificarea şi reproducerea acestui document distribuit gratuit on-line, total sau parţial, sunt interzise fără acordul scris al asociaţiei.

ASOCIAŢIA BUCUREŞTI PENTRU COPII DISLEXICI

Contact: copiidislexicibucuresti@gmail.com

Şiruri de numere

1. Suma lui Gauss pentru primele n numere naturale consecutive:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100(100+1)}{2} = \frac{100 * 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

1. Formula UPSI

***Ne ajută să determinăm numărul de elemente dintr-un şir de numere (*care nu sunt consecutive*):

- U = ultimul (cel mai mare = 67)
- P = primul (cel mai mic = 1)
- **S = saltul (din cât în cât merg numerele = aici merg din 2 în 2)**
- **I = 1**

***1, 3, 5, 7, …… **67 (nr. merg din 2 în 2, deci saltul este 2)**

$$nr. = UPSI$$

$$\boxed{nr. = (U - P) : S + 1}$$

$$nr. = (67 - 1) : 2 + 1 = 66 : 2 + 1 = 33 + 1 = 34$$

2. Formula UPI

***Ne ajută să determinăm numărul de elemente dintr-un şir de numere *consecutive*:

- U = ultimul (cel mai mare = 2002)
- P = primul (cel mai mic = 7)
- **I = 1**

*** **7, 8, 9, 10, …… 2002**

$$nr. = UPI$$

$$nr. = U - P + 1$$

$$nr. = 2002 - 7 + 1 = 1995 + 1 = 1996$$

3. Suma lui Gauss pentru un şir oarecare (cu salt) de numere naturale:

$$S = \frac{(U + P) * [(U - P) : S + 1]}{2}$$

$$S = \frac{(U + P) * nr.}{2}, \qquad unde\ nr. = (U - P) : S + 1$$

Teorema împărţirii cu rest (împărţirea cu rest)

$$\text{Deîmpărțit} : \text{împărțitor} = \text{cât}, r \quad (\text{împărțitor} > r)$$

$$\text{Deîmpărțit} = \text{împărțitor} * \text{cât} + r$$

Proprietățile ridicării la putere

1. Două puteri înmulţite care au aceeaşi bază = se copiază baza şi se adună puterile:

$$a^m \, x \, a^n = a^{m+n}$$

2. Două puteri împărțite care au aceeași bază = se copiază baza şi se scad exponenții:

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

3. Două puteri înmulțite care au același exponent = se copiază exponentul şi se înmulțesc bazele:

$$a^n \, x \, b^n = (a \, x \, b)^n$$

4. Două puteri împărţite care au același exponent = se copiază exponentul şi se împart bazele:

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

5. ***Puterea unei puteri*** = se înmulţesc exponenții între ei:

$$(a^m)^n = a^{m \, x \, n}$$

Fracții zecimale şi fracții ordinare

1. Fracții zecimale finite -> fracții ordinare

$$\overline{a, bcd \ldots} = \frac{\overline{abcd \ldots}}{1000 \ldots} = \frac{\text{scriem tot numărul fără virgulă}}{\text{scriem cifra 1 urmată de atâtea cifre de zero câte sunt cifrele în partea zecimală}}$$

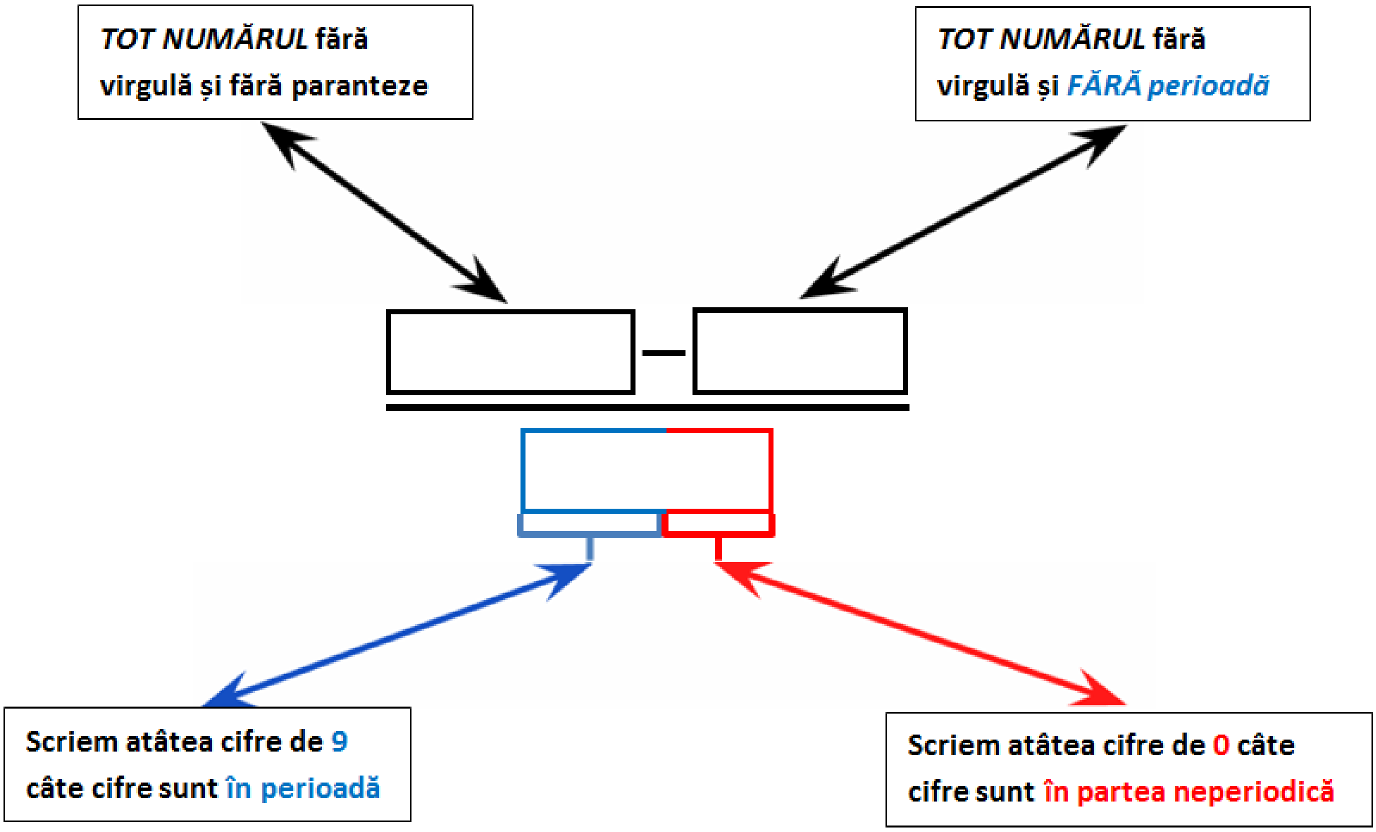
2. Fracții zecimale periodice (simple şi mixte) -> fracții ordinare

Partea zecimală dintre virgulă şi perioadă = partea neperiodică (anteperioadă)

$$\overline{abc \ldots z, abc \ldots z(abc \ldots z)} = \begin{cases} \overline{abc \ldots z} - \text{partea întreagă} \\ \overline{abc \ldots z} - \text{partea neperiodică} \\ \overline{(abc \ldots z)} - \text{partea periodică} \end{cases}$$

$$\overline{abc\ldots z},\overline{abc\ldots z}(\overline{abc\ldots z}) = \frac{\overline{abc\ldots zabc\ldots zabc\ldots z} - \overline{abc\ldots zabc\ldots z}}{9\ldots 90\ldots 0}$$

$$= \frac{\text{scriem tot numărul fără virgulă și fără paranteze} \quad \text{minus} \quad \text{numărul format din cifrele de dinaintea perioadei}}{\text{scriem atâtea cifre de 9 câte cifre sunt în perioadă} \quad \text{urmate de} \quad \text{atâtea cifre de zero câte cifre sunt în partea neperiodică}}$$

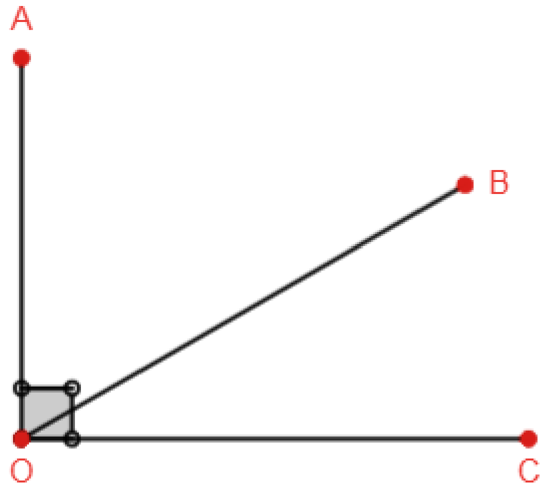


Fracții subunitare (sub o unitate = mai mică decât o unitate) $\frac{a}{b}$ –> numărătorul (a) este mai mic decât numitorul (b)
Fracții echiunitare (egale cu 1) *ECHI- Element de compunere însemnând „egal”* $\frac{a}{b}$ –> numărătorul (a) este egal cu numitorul (b)
Fracții supraunitare (deasupra unei unităţi = mai mare decât o unitate) $\frac{a}{b}$ –> numărătorul (a) este mai mare decat numitorul (b)

$$a\frac{b}{c} = \frac{c*a+b}{c}$$

Introducerea întregilor în fracție

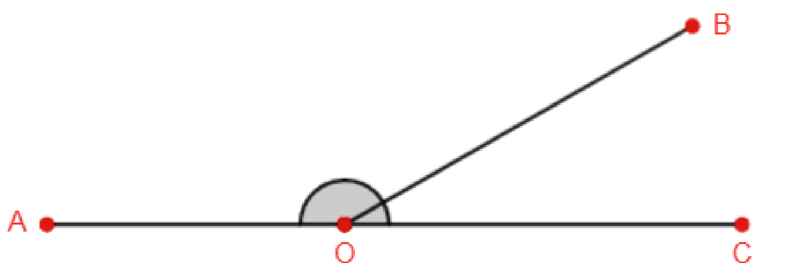
Unghiuri complementare



∢AOB şi ∢BOC sunt ***unghiuri complementare***

ÎMPREUNĂ FORMEAZĂ UN UNGHI DE 90° DE GRADE (***unghiul drept***)

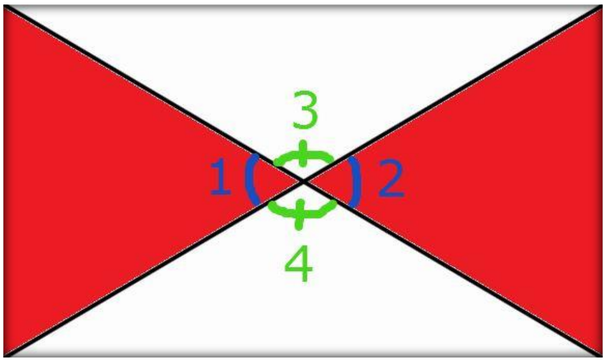
Unghiuri suplementare



∢AOB şi ∢BOC sunt ***unghiuri suplementare***

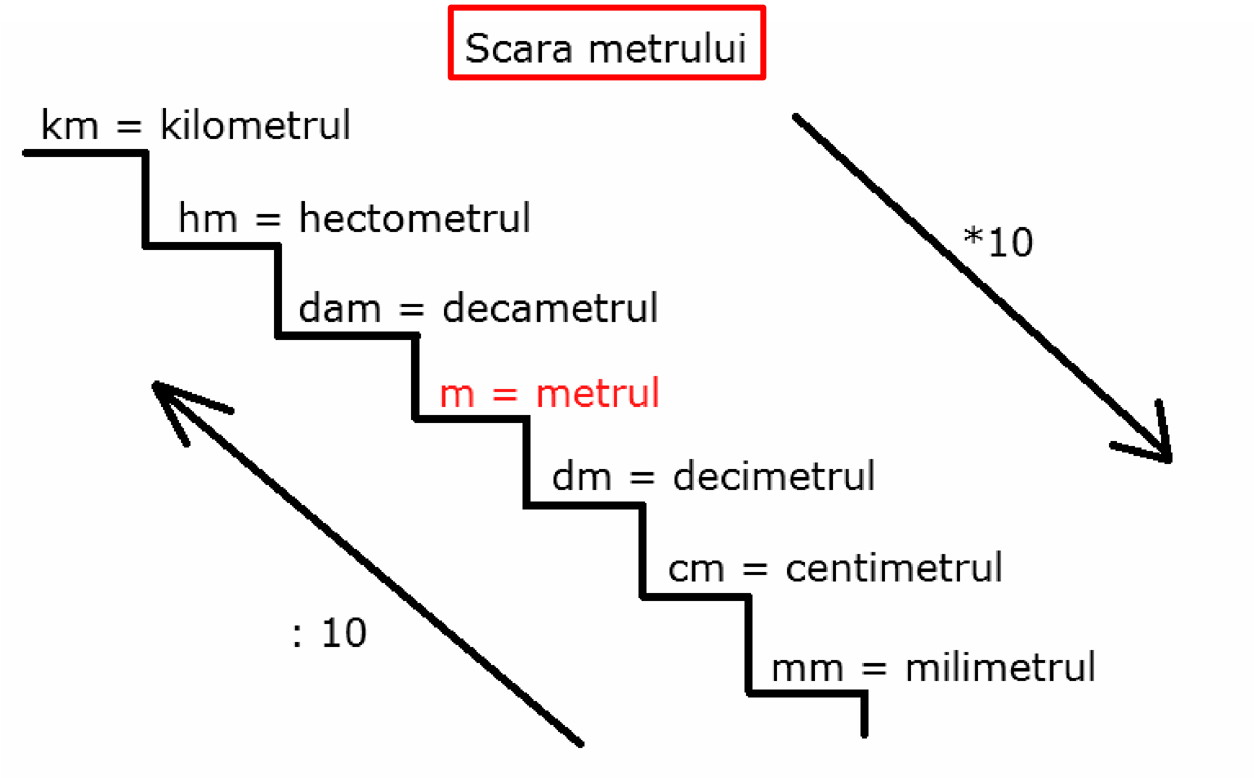
ÎMPREUNĂ FORMEAZĂ UN UNGHI DE 180° DE GRADE (unghiul alungit)

Unghiurile **opuse la vârf** sunt egale: $\hat{1} = \hat{2}$ și $\hat{3} = \hat{4}$



***Se formează atunci când **două drepte se intersectează** și determină un **X**.

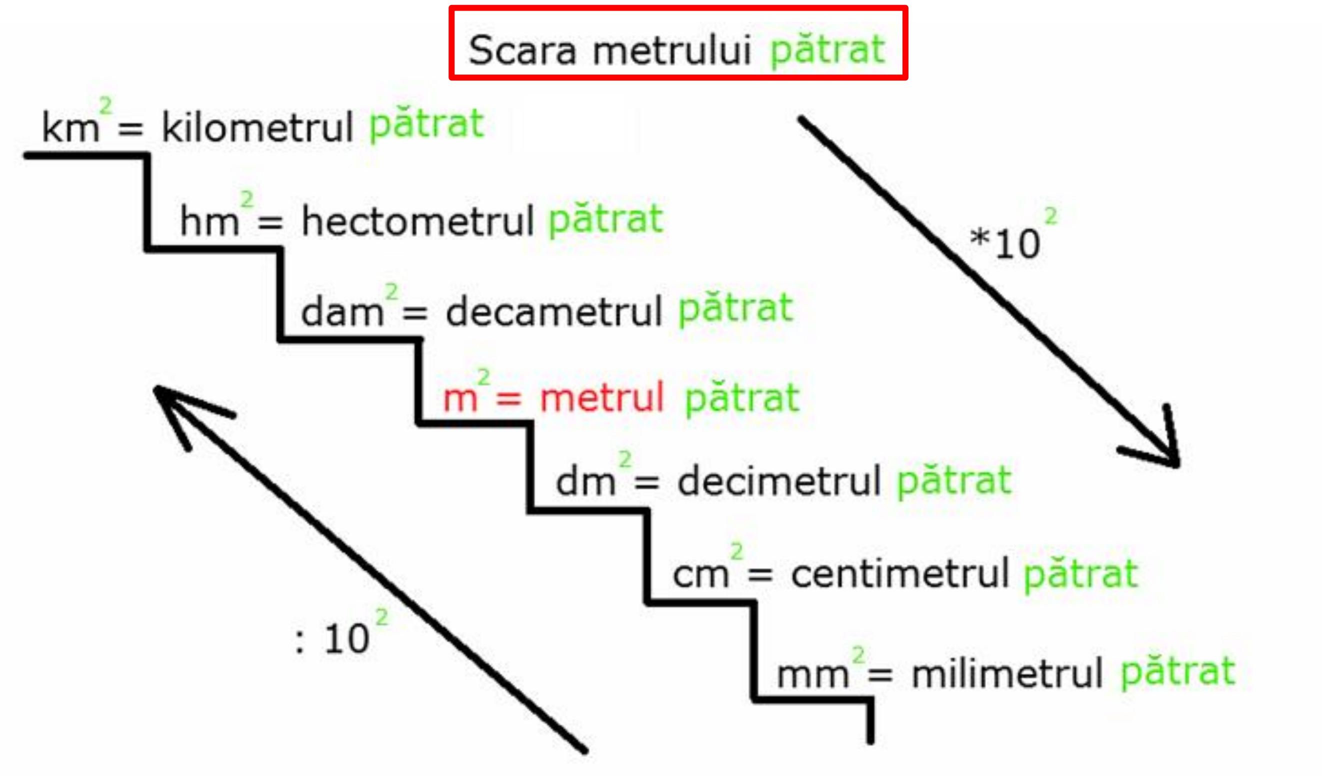
Prof. Claudiu Tamaş



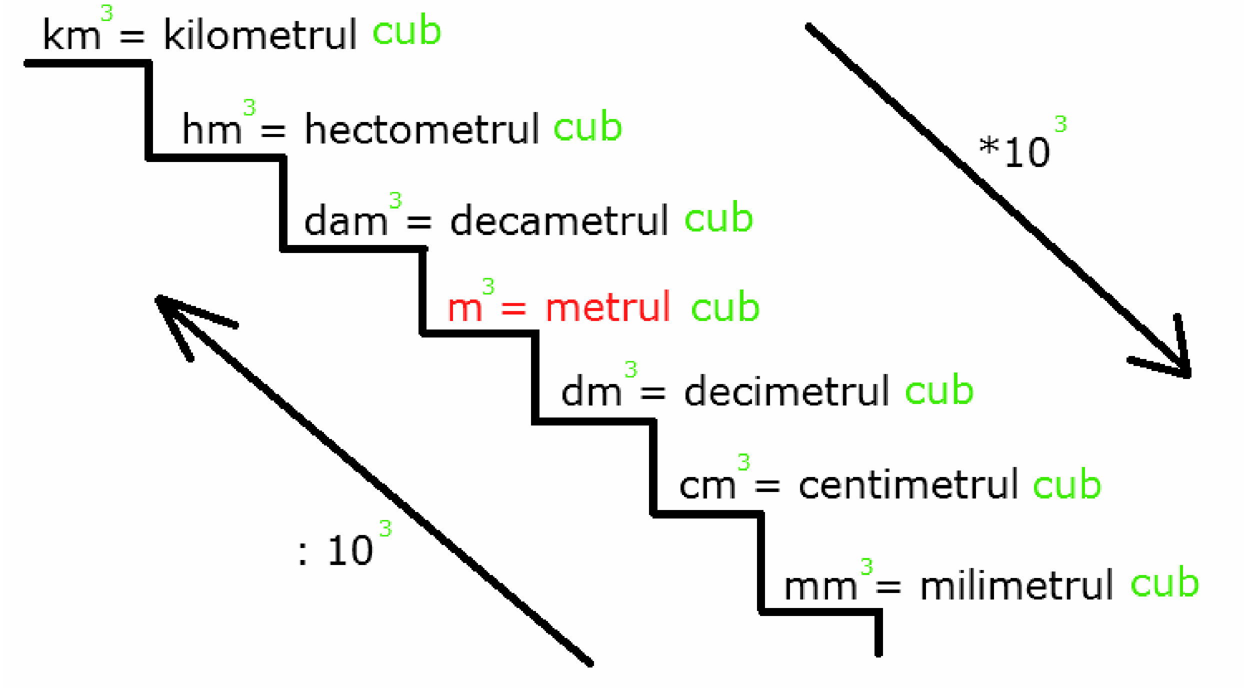
$$k = kilo = 10^3 = 1000\ (de\ 1000\ de\ ori\ mai\ mare)$$

$$h = hecto = 10^2 = 100\ (de\ 100\ de\ ori\ mai\ mare)$$

$$da = deca = 10^1 = 10\ (de\ 10\ ori\ mai\ mare)$$



Scara metrului cub

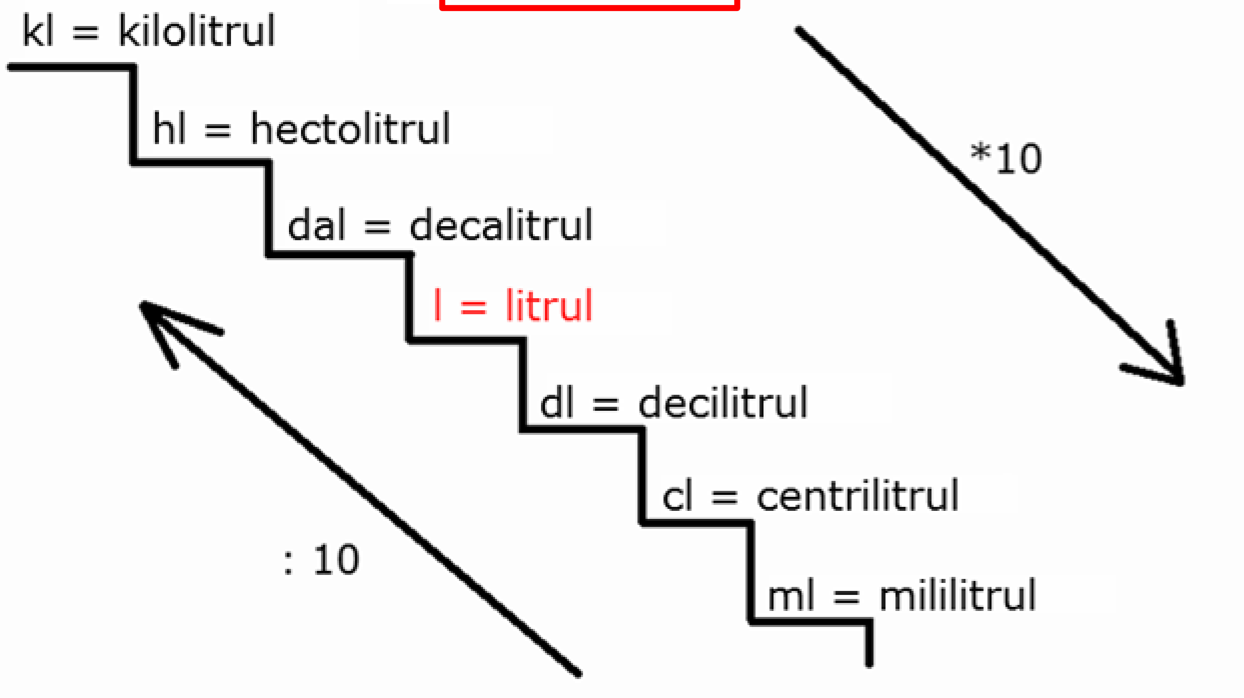


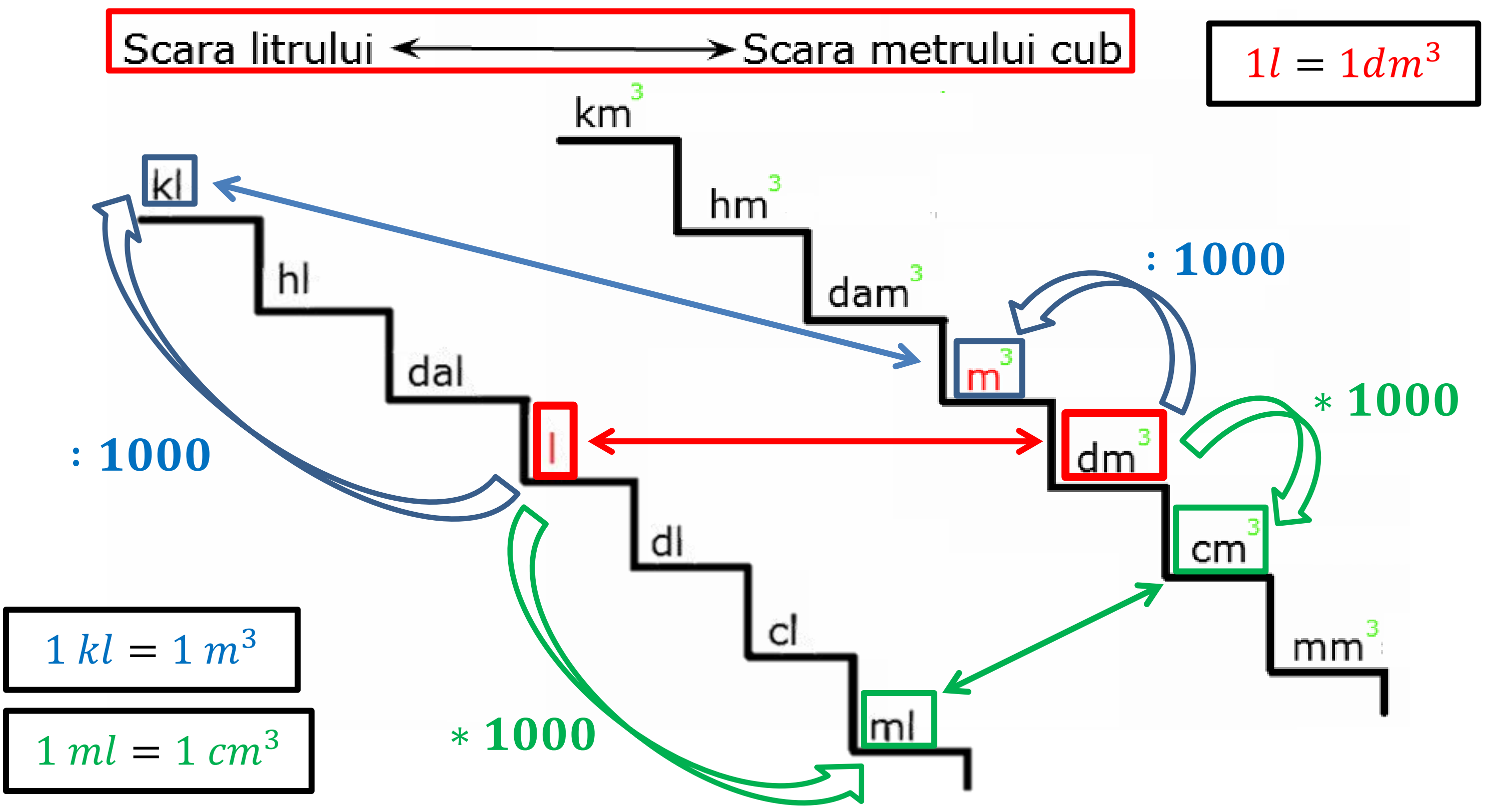
$$d = deci = \frac{1}{10}\ (de\ 10\ ori\ mai\ mic)$$

$$c = centi = \frac{1}{100}\ (de\ 100\ ori\ mai\ mic)$$

$$m = mili = \frac{1}{1000}\ (de\ 1000\ ori\ mai\ mic)$$

Scara litrului





$$\text{Pentru a calcula cmmdc} - \text{ul se înmulțesc: } \begin{cases} \text{doar factorii comuni} \\ \text{la cea mai mică putere} \\ \text{luați o singură dată} \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{cmmdc}\ (\boldsymbol{cel\ mai\ mare\ divizor\ comun})$$

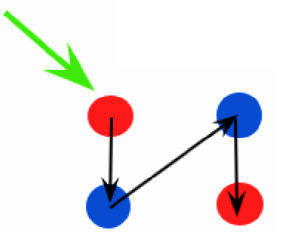
$$\text{Pentru a calcula cmmmc} - \text{ul se înmulțesc: } \begin{cases} \text{toți factorii} \\ \text{la cea mai mare putere} \\ \text{luați o singură dată} \end{cases}$$

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{cmmmc}\ (\boldsymbol{cel\ mai\ mic\ multiplu\ comun})$$

$$\boxed{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) * [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}}$$

Rapoarte şi proporţii

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$$



$$\underbrace{\boldsymbol{a} : \overbrace{\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}}^{\text{mezii}} : \boldsymbol{d}}_{\text{extremii}}$$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d} - \boldsymbol{extremii}$

$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} - \boldsymbol{mezii}$

$$\boxed{\begin{gathered} \boldsymbol{produsul\ extremilor} = \boldsymbol{produsul\ mezilor} \\ \boldsymbol{a} * \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{c} \Leftrightarrow \boldsymbol{b} * \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{d} \end{gathered}}$$

Prof. Claudiu Tamaş

Proporții derivate

I. Proporții derivate cu aceiași termeni:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff a*d=b*c$$

$a.\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \iff d*a=b*c$ (schimbarea extremilor între ei)

$b.\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \iff a*d=c*b$ (schimbarea mezilor între ei)

$c.\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \iff b*c=a*d$ (inversarea fiecărui raport)

II. Proporții derivate cu alți termeni:

$a.\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

$b.\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$

$c.\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$

$d.\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$

$e.\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

$f.\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

$g.\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ka}{kb}=\frac{kc}{kd}$

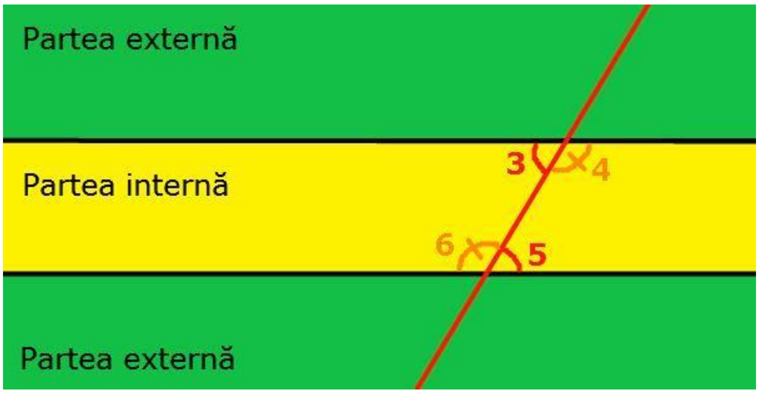
$h.\ a*d*m=b*c*m \iff \frac{a}{mb}=\frac{c}{md} \iff \frac{ma}{b}=\frac{mc}{d}$

Probabilități: $p=\dfrac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$

Două drepte paralele tăiate de secantă

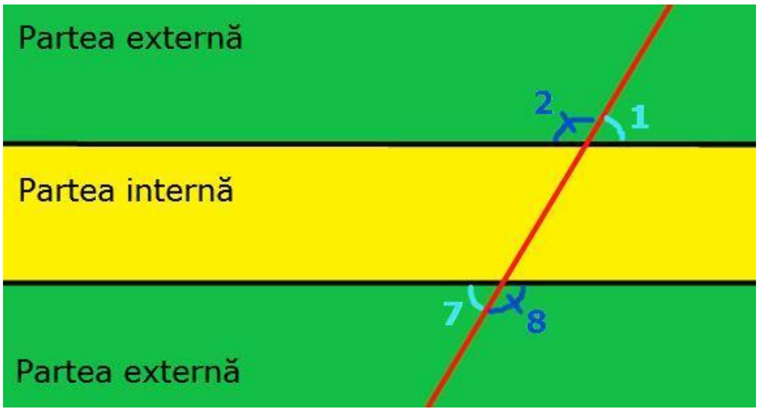
ALTERNE – când de-o parte, când de alta a liniei roşii/alternează
INTERNE – se află în interiorul liniilor paralele
EXTERNE – se află în exteriorul liniilor paralele

1. ***Unghiurile alterne interne*** = sunt perechile de unghiuri egale care se formează ***între liniile paralele de o parte şi de alta*** a secantei.



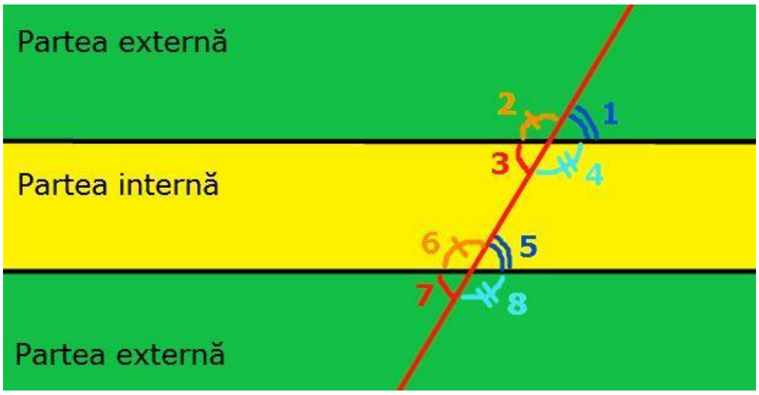
Unghiuri alterne interne:
$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 5$ şi $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 6$

2. ***Unghiurile alterne externe*** = sunt perechile de unghiuri egale care se formează ***în afara liniilor paralele de o parte şi de alta*** a secantei.



Unghiuri alterne externe:
$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 7$ şi $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 8$

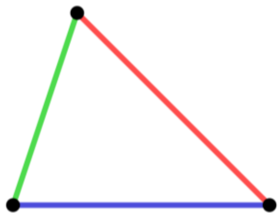
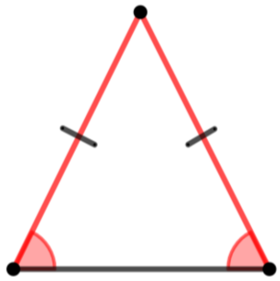
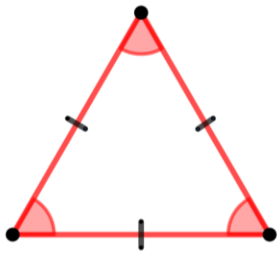
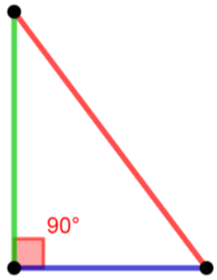
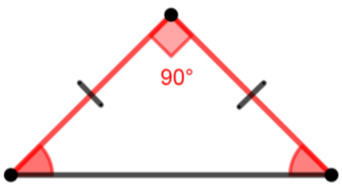
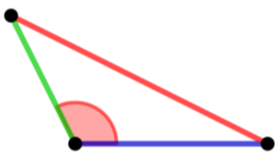
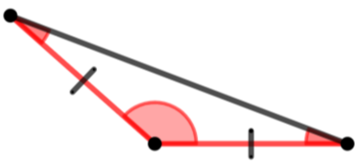
3. ***Unghiurile corespondente*** = sunt perechile de unghiuri egale care se formează ***de aceeaşi parte*** a secantei, ***unul în interior*** şi ***celălalt în exterior***.



Unghiuri corespondente:
$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$ şi $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 7$
$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 6$ şi $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 8$

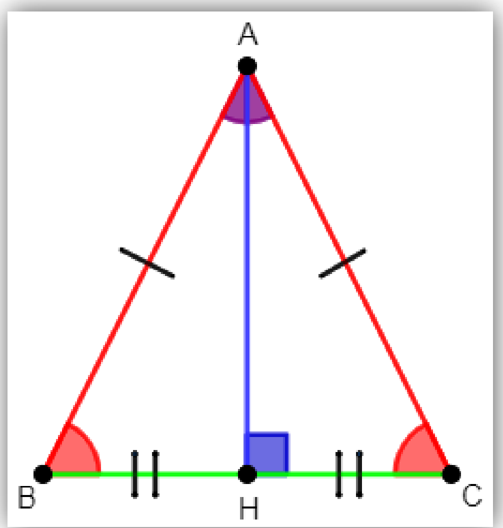
Prof. Claudiu Tamaş

I. Clasificarea triunghiurilor

	Triunghiul scalen	Triunghiul isoscel	Triunghiul echilateral
Ascuţitunghic			
Dreptunghic			
Obtuzunghic			

1. Triunghiul isoscel

Triunghiul isoscel = are ***două laturi egale*** şi ***două unghiuri egale***:

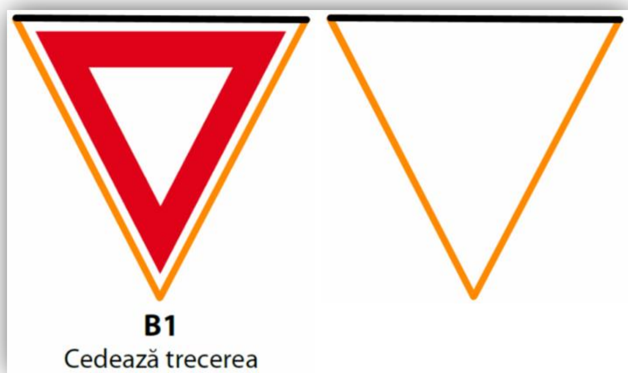


- $[AB] \equiv [AC]$
- $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$
- Înălţimea corespunzătoare laturii diferite este

şi mediană, bisectoare şi mediatoare:

$$\begin{cases} \text{înălţime: } AH \perp BC \\ \text{mediană: } [BH] \equiv [HC] \\ \text{bisectoare: } \widehat{BAH} \equiv \widehat{CAH} \\ \text{mediatoare: } \begin{cases} AH \perp BC \\ [BH] \equiv [HC] \end{cases} \end{cases}$$

ISO = ***egale***



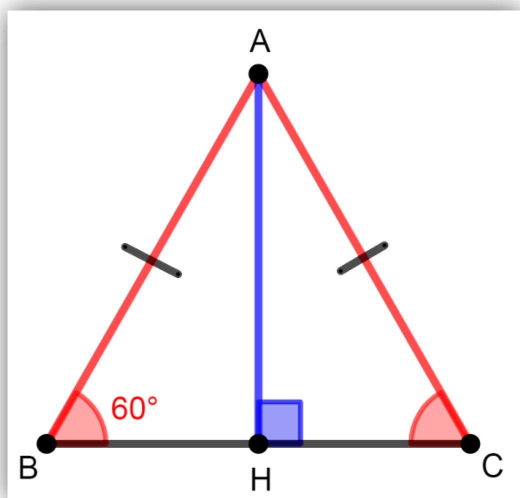
ISOSCEL

DOUA litere de S => două laturi ***egale***

- Are **două laturi egale** şi una diferită (baza)
- are **două unghiuri egale** ⇔ **unghiurile vecine laturii diferite** (bazei)

Exemple de triunghiuri isoscele în viaţa reală:

***Triunghiul isoscel care are **cel puţin** un **unghi de 60°** devine triunghi **echilateral.**



Deşi triunghiul alăturat pare isoscel, de fapt, acesta este echilateral.

$$\widehat{BAC} = 180° - (60° + 60°) = 180° - 120° = 60°$$

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60° =>$$

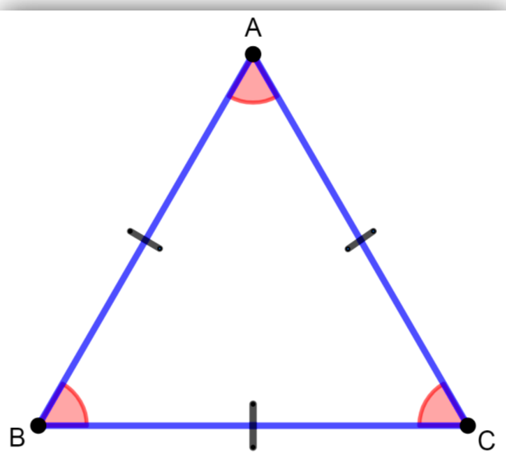
$$\Delta ABC \ este \ echilateral$$

!!! Suma unghiurilor unui triunghi va fi întotdeauna egală cu 180°!!!

2. Triunghiul echilateral

ECHI = egal *LATERAL* = indică laturile

ECHILATERAL = toate laturile egale



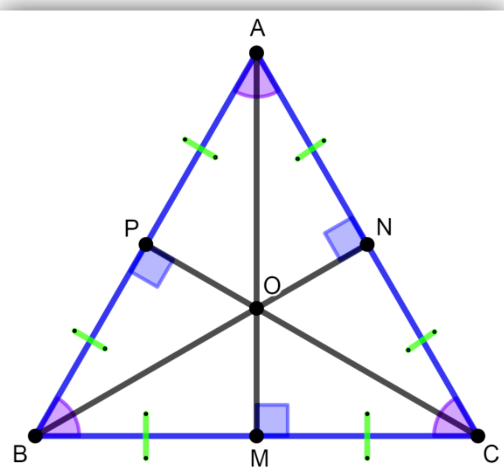
– are toate laturile egale (congruente)

$\mathbf{AB = BC = AC}$

– are toate unghiurile egale (congruente)

$\sphericalangle \mathbf{A} = \sphericalangle \mathbf{B} = \sphericalangle \mathbf{C}$

În triunghiul echilateral, TOATE cele trei înălţimi sunt şi mediane, mediatoare , bisectoare şi axe de simetrie.



În triunghiul echilateral, ortocentrul coincide cu centrul de greutate, centrul cercului înscris şi centrul cercului circumscris.

$$\begin{cases} \text{AM înălțime: } AM \perp BC \\ \text{[AM] mediană: } [BM] \equiv [MC] \\ \text{(AM bisectoare: } \widehat{BAH} \equiv \widehat{CAH} \\ \text{AM mediatoare: } \begin{cases} AM \perp BC \\ [BH] \equiv [HC] \end{cases} \end{cases}$$

*** *Intersecţia medianelor* ***(****centrul de greutate****)*** se află la **o treime de bază** şi **două treimi de vârf**:

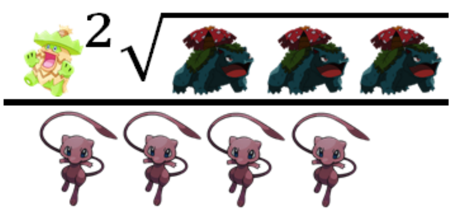
$$OM = \frac{1}{3}AM \qquad AO = \frac{2}{3}AM$$

Inălţimea:

$h_\Delta =$ 

$$h_\Delta = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

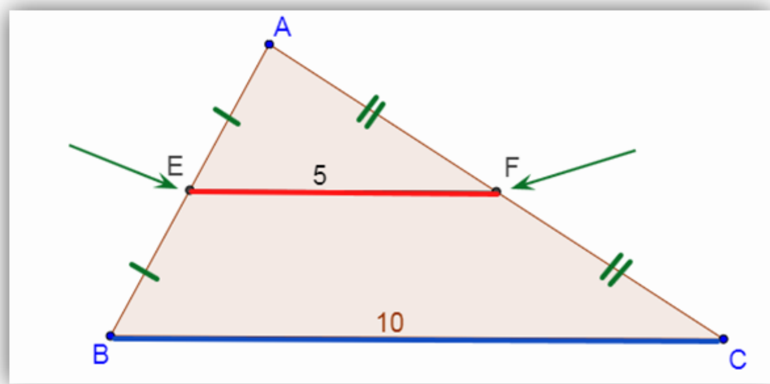
Aria:

$A_\Delta =$ 

$$A_\Delta = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Prof. Claudiu Tamaş

Linia mijlocie în triunghi



Este segmentul care uneşte mijloacele (E si F) a două laturi.

Linia mijlocie:

1. *Este paralelă cu a treia latură*: $EF||BC$
2. *Este jumătate din a treia latură*: $EF = \frac{BC}{2}$

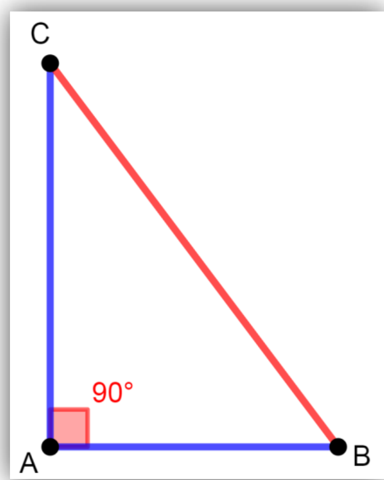
Teorema complementară liniei mijlocii în triunghi

***Dacă *un segment cu extremităţile pe două laturi* este paralel cu a treia latură şi dacă una dintre *extremităţi* este pe mijlocul unei laturii, atunci segmentul respectiv este linie mijlocie.

$$\left.\begin{matrix} EF||BC \\ E \text{ mijlocul lui } [AB] \end{matrix}\right| \Rightarrow EF \text{ linie mijlocie} \Rightarrow EF = \frac{BC}{2}$$

$$\left.\begin{matrix} EF||BC \\ F \text{ mijlocul lui } [AC] \end{matrix}\right| \Rightarrow EF \text{ linie mijlocie} \Rightarrow EF = \frac{BC}{2}$$

3. *Triunghiul dreptunghic*



$$\widehat{BAC} = \sphericalangle BAC = 90°$$

$[AC]$ și $[AB]$ *sunt catetele* $[BC] - ipotenuza$

Teorema lui Pitagora: Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei.

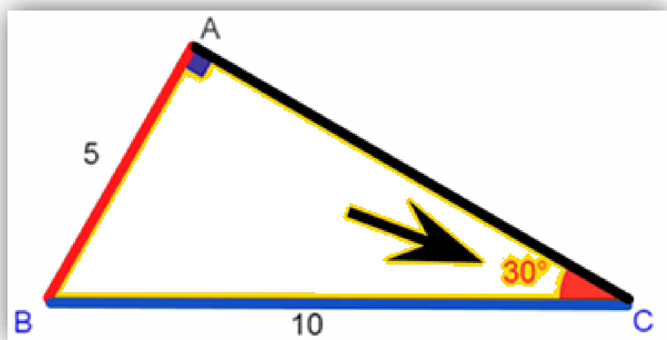
$$\Delta ABC \text{ dreptunghic cu } \hat{A} = 90° \overset{T.P.}{\Rightarrow} c_1^2 + c_2^2 = i^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Reciproca teoremei lui Pitagora: ***Dacă într-un triunghi oarecare, suma pătratelor a două laturi este egală cu pătratul celei de-a treia laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.***

$$\Delta ABC\ oarecare: AB^2 + AC^2 = BC^2 \overset{R.T.P.}{=>} \Delta ABC\ dreptunghic$$

Teorema unghiului de 30°: Într-un triunghi dreptunghic, cateta opusă unghiului de 30° este jumătate din ipotenuză.

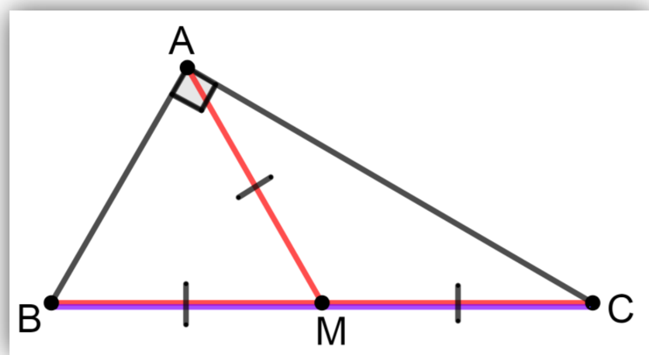


$$\Delta ABC\ dr., \widehat{C} = 30° \overset{T.30°}{=>} AB = \frac{BC}{2}$$

Reciproca teoremei unghiului de 30°: Într-un triunghi dreptunghic, dacă o catetă este jumătate din ipotenuză, atunci cateta respectivă este opusă unghiului de 30°.

$$\Delta ABC\ dr.: AB = \frac{BC}{2} \overset{R.T.30°}{=>} \widehat{C} = 30°$$

Teorema Medianei (T.M.):



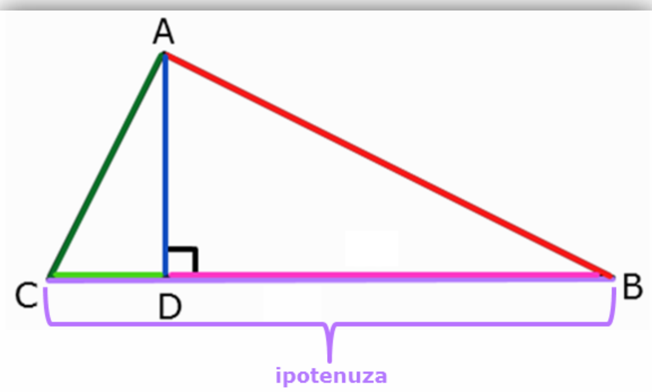
Într-un triunghi dreptunghic, mediana care cade pe ipotenuză este jumătate din aceasta.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC\ dr.cu\ \sphericalangle A = 90° \\ AM\ mediana, M \in BC\end{array}\right| \begin{array}{c} T.M. \\ => \end{array}$$

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5\ cm$$

Reciproca Teoremei Medianei (R.T.M.): Dacă într-un triunghi, mediana unei laturi este jumătate din aceasta, atunci triunghiul e dreptunghic.

$$\left.\begin{array}{c}\Delta ABC \\ AM\ mediana, M \in BC\ cu\ AM = \frac{BC}{2}\end{array}\right| \overset{R.T.M.}{=>} \Delta ABC\ dreptunghic$$



BC – ipotenuza

AC – catetă => CD proiecţia lui AC pe ipotenuză

AB – catetă => DB proiecţia lui AB pe ipotenuză

Teorema catetei: Într-un triunghi dreptunghic, pătratul catetei este egal cu produsul dintre ipotenuză şi proiecţia ei pe ipotenuză.

$$AC^2 = BC * CD \Leftrightarrow AC = \sqrt{BC * CD}$$

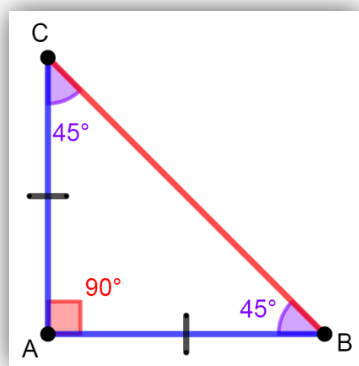
$$AB^2 = BC * DB \Leftrightarrow AB = \sqrt{BC * DB}$$

Înălțimea AD nu este proiecția niciunei catete!!!

Teorema înălțimii: Într-un triunghi dreptunghic, înălţimea relativă ipotenuzei ridicată la pătrat este egală cu produsul proiecţiilor catetelor pe ipotenuză.

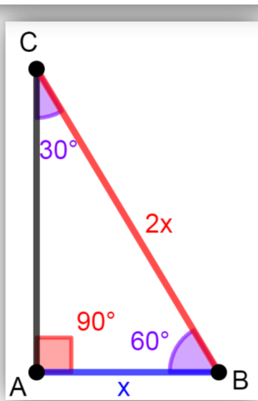
$$AD^2 = CD * DB \Leftrightarrow AD = \sqrt{CD * DB}$$

Lema înălțimii **= produsul catetelor pe ipotenuză:** $AD = \dfrac{AC * AB}{BC}$



****Triunghiul dreptunghic isoscel:***

- are catetele egale: $c_1 = c_2$
- ipotenuza: $i = c_1\sqrt{2} = c_2\sqrt{2}$
- Unghiurile vecine ipotenuzei sunt egale cu 45°

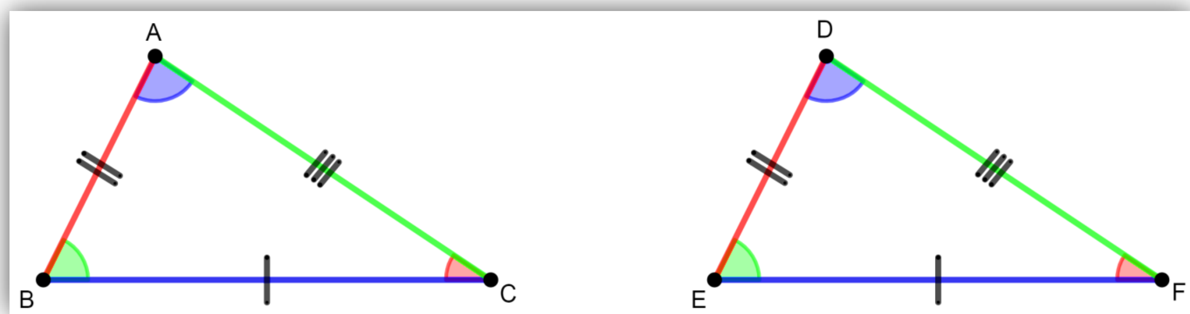


****Triunghiul dreptunghic cu un unghi de 30° (sau 60°)***

$$c_1^2 + c_2^2 = i^2$$

$$c_1^2 + x^2 = (2x)^2$$

Triunghiuri echivalente

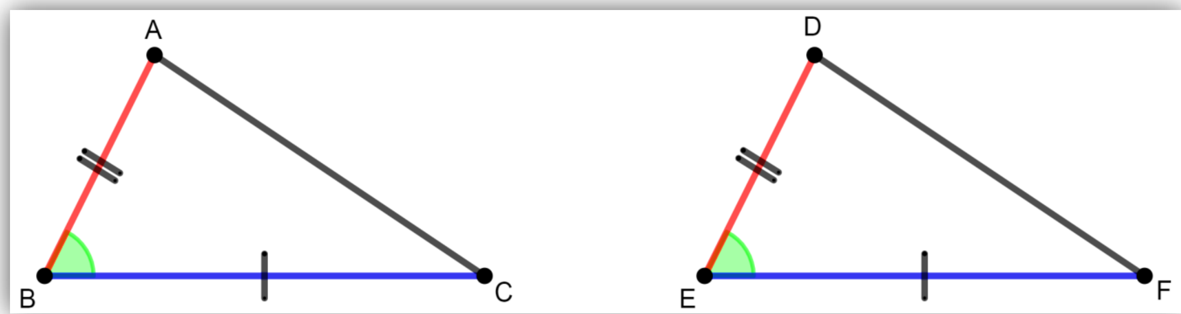


$$\Delta ABC \equiv \Delta DEF \Rightarrow \begin{matrix} \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{matrix} \quad si \quad \begin{matrix} [AB] \equiv [DE] \\ [BC] \equiv [EF] \\ [AC] \equiv [DF] \end{matrix}$$

Cazuri de congruenţă ale triunghiurilor:

1. ***Cazul* L.U.L.** (Latură Unghi Latură)

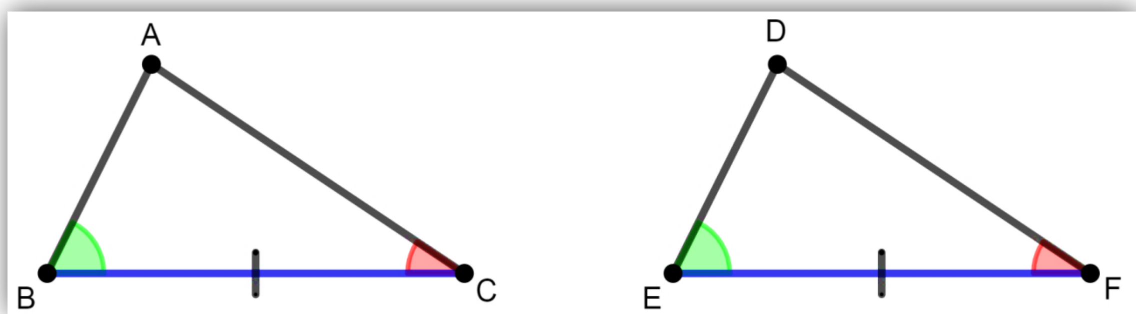
*** Dacă două triunghiuri au ***două perechi de laturi*** și ***unghiul cuprins între ele*** congruente, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.



$$\left.\begin{matrix} L.: [AB] \equiv [DE] \\ U.: \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \\ L.: [BC] \equiv [EF] \end{matrix}\right| \overset{L.U.L.}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta DEF$$

2. ***Cazul* U.L.U.** (Unghi Latură Unghi)

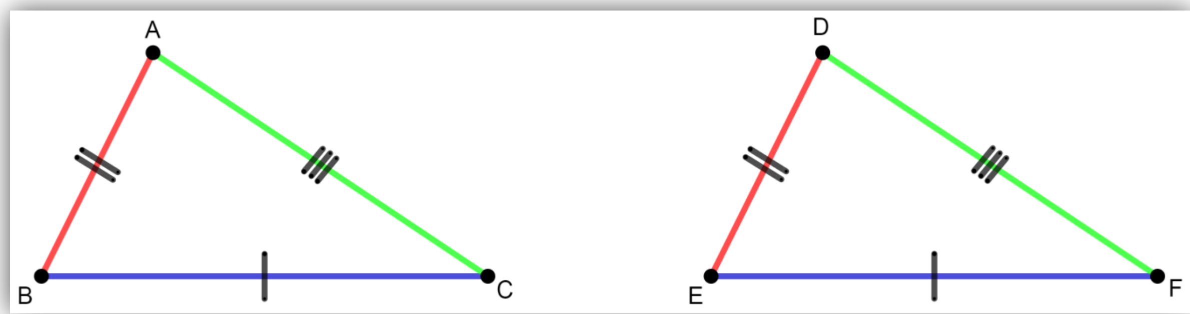
*** Dacă două triunghiuri au ***două perechi de unghiuri*** și ***latura cuprinsă între ele*** congruente, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l} U.: \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \\ L.: [BC] \equiv [EF] \\ U.: \widehat{BCA} \equiv \widehat{EFD} \end{array}\right| \overset{U.L.U.}{=>} \Delta ABC \equiv \Delta DEF$$

3. *Cazul* L.L.L. (Latură Latură Latură)

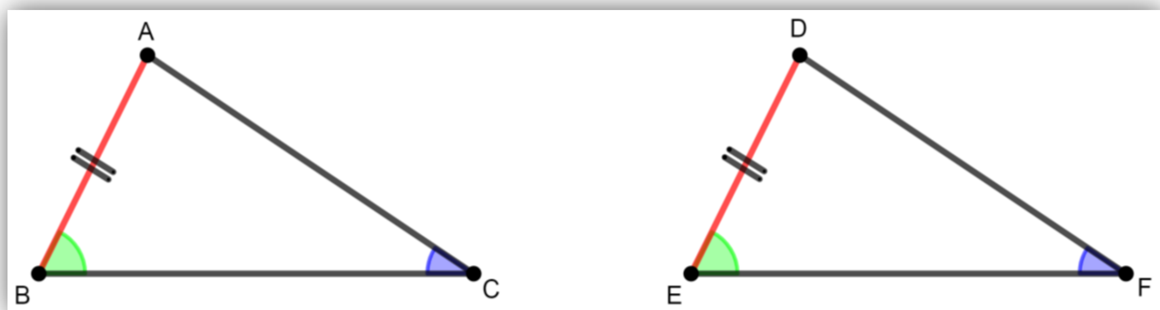
*** Dacă două triunghiuri au ***toate laturile corespondente congruente***, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l} L.: [AB] \equiv [DE] \\ L.: [BC] \equiv [EF] \\ L.: [AC] \equiv [DF] \end{array}\right| \overset{L.L.L.}{=>} \Delta ABC \equiv \Delta DEF$$

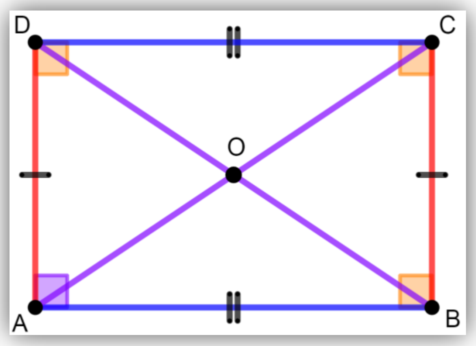
4. *Cazul* L.U.U. (Latură Unghi **Unghi**)

*** Dacă două triunghiuri au ***o pereche de laturi corespondente congruente*** şi ***două perechi de unghiuri congruente*** (***o pereche adiacentă laturii*** şi ***cealaltă neadiacentă***), atunci cele două triunghiuri sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l} L.: [AB] \equiv [DE] \\ U.: \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \\ U.: \widehat{BCA} \equiv \widehat{EFD} \end{array}\right| \overset{L.U.U.}{=>} \Delta ABC \equiv \Delta DEF$$

II. Dreptunghiul



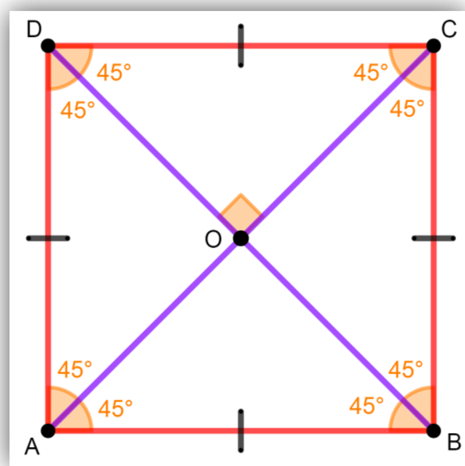
- **Laturile opuse** sunt paralele si egale (congruente)

  $[AB] \equiv [CD]$ $[AD] \equiv [BC]$

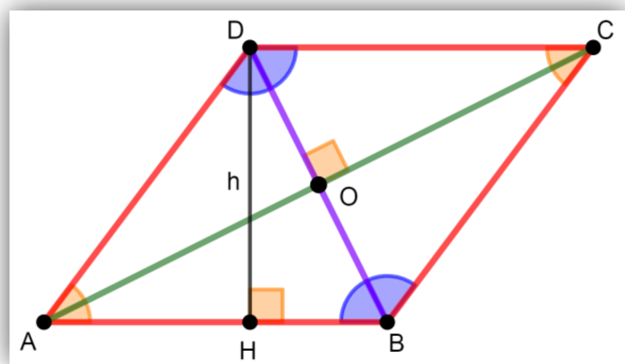
  $AB||CD$ $AD||BC$
- Are **toate unghiurile** de 90°: $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$
- **Diagonalele** sunt egale: $[DB] \equiv [AC]$
- **Diagonalele** se înjumătăţesc:

  $[DO] \equiv [OB]$ $[AO] \equiv [OC]$

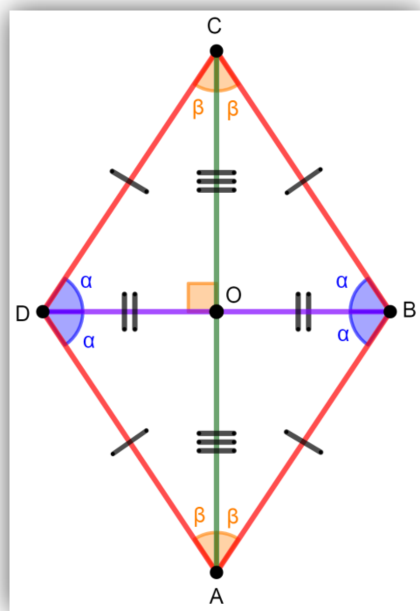
III. Pătratul



- **Toate laturile** sunt egale: $AB = BC = CD = AD$
- **Laturile opuse** sunt paralele: $AB||CD$ $AD||BC$
- Are **toate unghiurile** de 90°: $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$
- **Diagonalele** sunt egale: $[DB] \equiv [AC]$
- **Diagonalele** se înjumătăţesc: $DO = OB$ $AO = OC$
- **Diagonalele** sunt perpendiculare şi sunt bisectoarele unghiurilor: $AC \perp DB$
- **Diagonala**: $d = l\sqrt{2}$



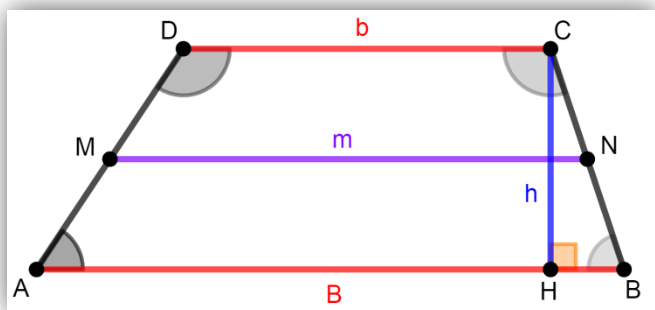
IV. Rombul



- **Toate laturile** sunt egale: $AB = BC = CD = AD$
- **Laturile opuse** sunt paralele: $AB||CD$ $AD||BC$
- Unghiurile opuse sunt egale: $\hat{A} \equiv \hat{C}$ $\hat{D} \equiv \hat{B}$
- Unghiurile vecine sunt suplementare:

  $\hat{A} + \hat{B} = 180°$ $\hat{C} + \hat{D} = 180°$
- Diagonalele se înjumătăţesc: $DO = OB$ $AO = OC$
- Diagonalele sunt perpendiculare şi sunt bisectoarele unghiurilor: $AC \perp DB$

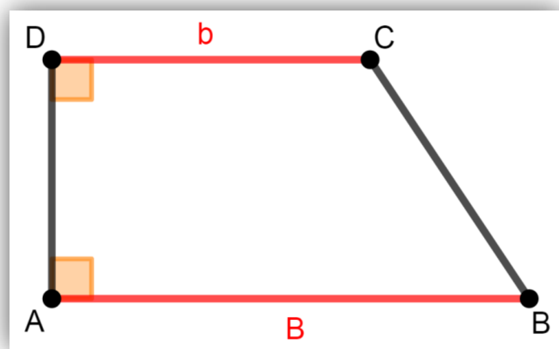
V. Trapezul



- **Bazele** sunt paralele: $AB||CD$
- Unghiurile vecine laturilor oblice sunt suplementare:

$\widehat{A} + \widehat{D} = 180°$ $\widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

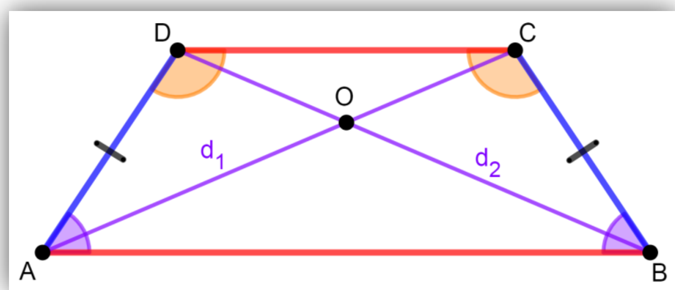
- Linia mijlocie $m = \dfrac{b + B}{2}$



a. Trapezul dreptunghic

- Are două unghiuri drepte: $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$

b. Trapezul isoscel

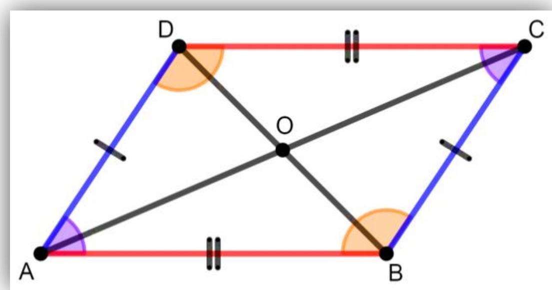


- **Laturile oblice** sunt egale: $AD = BC$
- Unghiurile vecine bazelor sunt egale:

$\widehat{A} \equiv \widehat{B}$ $\widehat{C} \equiv \widehat{D}$

- Diagonalele sunt egale: $AB = CD$

VI. Paralelogramul



- Laturile opuse sunt paralele şi congruente:

$AB = CD$ $AB||CD$ $AD = BC$ $AD||BC$

- Unghiurile opuse sunt congruente:

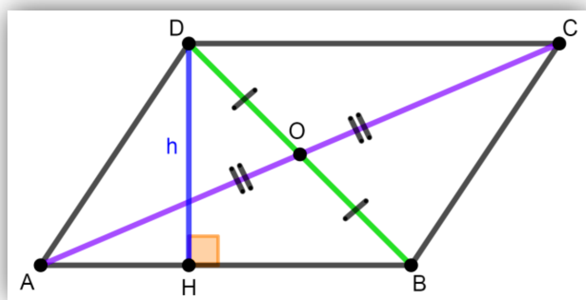
$\widehat{A} \equiv \widehat{C}$ $\widehat{B} \equiv \widehat{D}$

- Unghiurile vecine sunt suplementare:

$\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$ $\widehat{C} + \widehat{D} = 180°$

- Diagonalele se înjumătăţesc:

$AO = OC$ $DO = OB$



MEDII

- Media geometrică: $m_g = \sqrt{x * y}$
- Media aritmetică a două numere: $m_a = \frac{x+y}{2}$
- Media aritmetică a trei numere: $m_a = \frac{a+b+c}{3}$
- Media aritmetică ponderată: $m_{ap} = \frac{a*p_1+b*p_2+c*p_3+\cdots z*p_n}{p_1+p_2+p_3+\cdots p_n}$

Note	5	6	7	8	9	10
Nr. de elevi	4	2	5	3	1	1

$$m_{ap} = \frac{5*4+6*2+7*5+8*3+9*1+10*1}{4+2+5+3+1+1}$$

Arii si perimetre

Perimetrul = suma tuturor laturilor

1. Triunghiul – valabilă pentru orice Δ:

$$A_\Delta = \frac{b \, * \, h}{2} = \frac{l_1 \, * \, l_2 * \sin(\widehat{l_1, l_2})}{2}$$

1.1 Δ echilateral: $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ $\qquad A = \frac{l^2\sqrt{3}}{2^2}$

1.2 Δ dreptunghic: $A = \frac{c_1 * c_2}{2}$ $\qquad A = \frac{h * ip}{2}$

2. Dreptunghiul:

$$P = 2L + 2l \qquad A = L * l$$

3. Pătratul:

$$P = 4l \qquad A = l^2$$

4. Rombul:

$$P = 4l \qquad A = \frac{d_1 * d_2}{2}$$

5. **Trapezul:**

$$P = b + B + l_1 + l_2 \qquad A = \frac{(b+B)\ x\ h}{2} = m\ x\ h, \qquad unde\ m = \frac{b+B}{2}$$

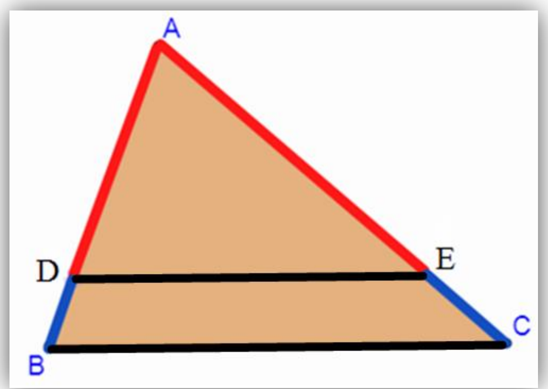
*****bebe mic împreună cu Bebe Mare se luptă cu Înălțimea sa, îl înving și împart tot regatul la 2.**

6. **Paralelogramul:**

$$P = 2b + 2l$$
$$A = b * h$$

Teorema lui Thales

Într-un triunghi, dacă un segment este paralel unei laturi, atunci acela formează segmente proporționale pe laturile intersectate.



$$DE \,||BC \overset{T.Th.}{=>} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \overset{R.T.Th.}{=>} DE \,||BC$$

Proporționalitatea directă (împărțire):

$$\{a, b, c\}\ sunt\ d.p.\{2, 4, 5\} \ => \frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k => a = 2k;\ b = 4k;\ c = 5k$$

Proporționalitatea inversă (înmulțire):

$$\{a, b, c\}\ sunt\ i.p.\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\} => a * \frac{1}{2} = b * \frac{1}{4} = c * \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$$

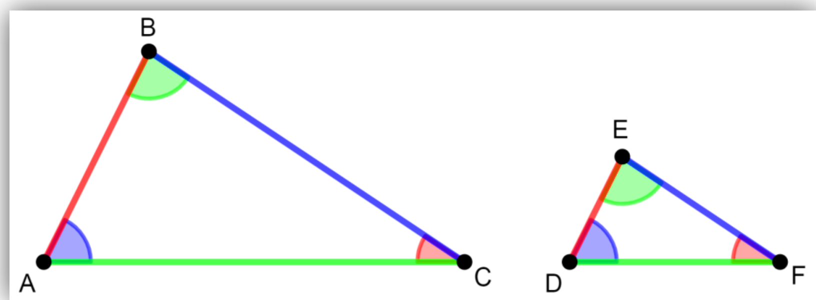
Suma unghiurilor unui poligon oarecare:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{n} - \mathbf{2}) * \mathbf{180°}, \text{unde } \mathbf{n} = \text{numărul de laturi ale poligonului}$$

Valoarea unghiului într-un poligon regulat:

$$u = \frac{(\mathbf{n} - \mathbf{2}) * \mathbf{180°}}{n}, \text{unde } \mathbf{n} = \text{numărul de laturi ale poligonului regulat}$$

Triunghiuri asemenea



$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$$

$$\hat{A} \equiv \hat{D} \qquad \hat{B} \equiv \hat{E} \qquad \hat{C} \equiv \hat{F}$$

Dacă două triunghiuri **sunt asemenea (~),** atunci raportul perimetrelor este egal cu raportul lor de asemănare.

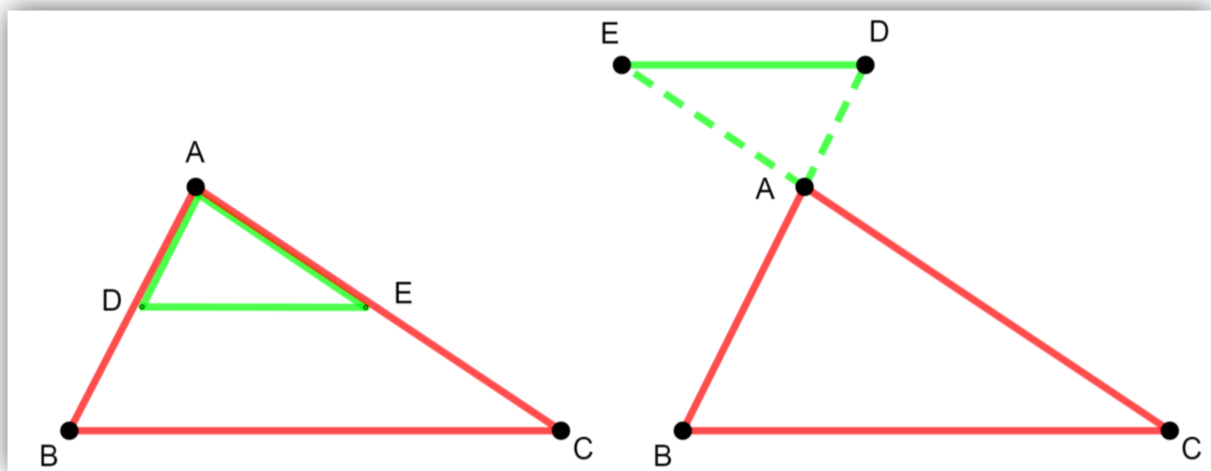
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB + BC + AC}{DE + EF + DF} = \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta DEF}} = k$$

Dacă două triunghiuri **sunt asemenea (~),** atunci raportul ariilor este egal cu ***pătratul*** raportului lor de asemănare.

$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta DEF}} = k^2$$

Teorema fundamentală a asemănării

Def. *O paralelă dusă la una din laturile unui triunghi* formează cu celelalte două laturi (sau cu prelungirile lor) un *triunghi asemenea cu cel dat*.

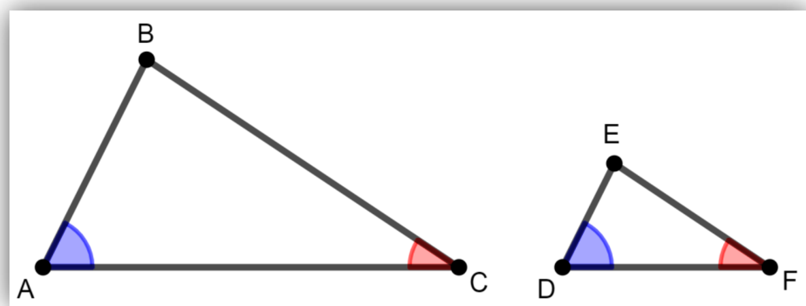


$$ED \| BC \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta BDE \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{ED}{AC}$$

Criterii de asemănare a triunghiurilor

1. ***Criteriul U.U.***

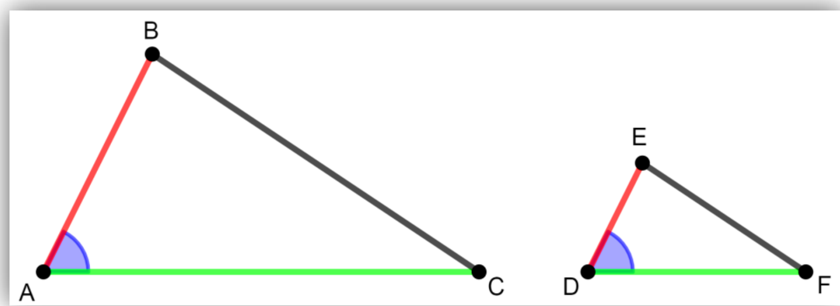
*** Două triunghiuri sunt ***asemenea*** dacă au ***două perechi de unghiuri corespondente congruente***.



$$\left.\begin{array}{l} U.: \widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF} \\ U.: \widehat{BCA} \equiv \widehat{EFD} \end{array}\right| \begin{array}{c} U.U. \\ => \end{array} \Delta BAC \sim \Delta EDF$$

2. ***Criteriul L.U.L.***

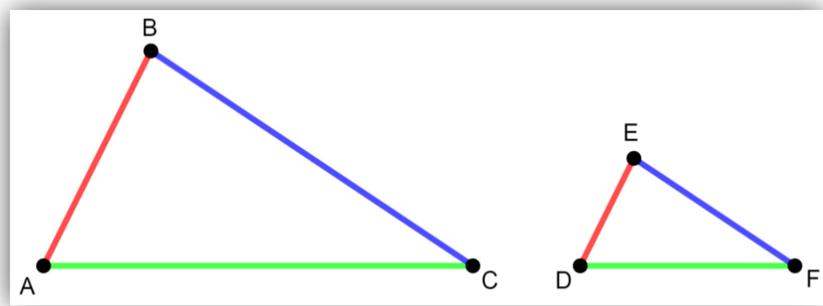
*** Două triunghiuri sunt ***asemenea*** dacă au ***două perechi de laturi corespondente proporţionale*** şi ***unghiurile dintre ele congruente***.



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} \\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF} \end{array}\right| \begin{array}{c} L.U.L. \\ => \end{array} \Delta BAC \sim \Delta EDF$$

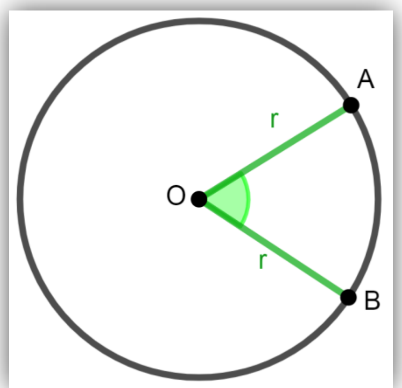
3. ***Criteriul L.L.L.***

*** Două triunghiuri sunt ***asemenea*** dacă au ***laturile corespondente proporţionale***.



$$\left.\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}\right| \begin{array}{c} L.L.L. \\ => \end{array} \Delta BAC \sim \Delta EDF$$

Cercul

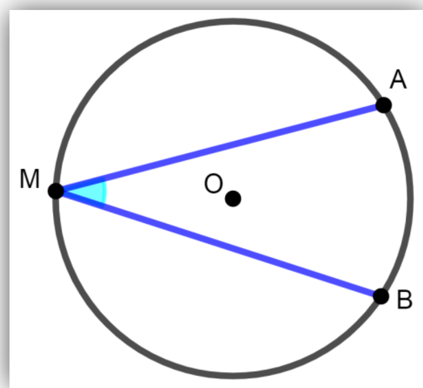


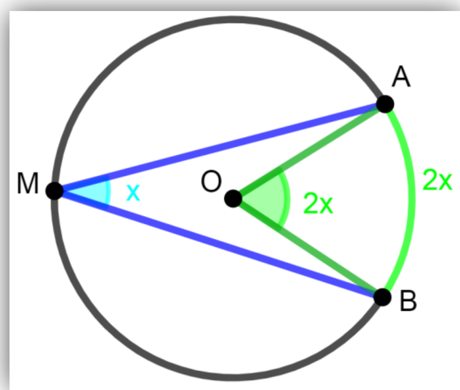
Unghi la centru = *unghiul format din* ***DOUĂ RAZE*** *cu* ***VÂRFUL ÎN CENTRUL CERCULUI*** ***(O)****.*

$\widehat{AOB} = unghi\ la\ centru$

Unghi înscris în cerc = *unghiul format din* ***DOUĂ COARDE*** *cu* ***VÂRFUL PE CIRCUMFERINŢĂ (M)****.*

$\widehat{AMB} = \text{unghi înscris în cerc}$



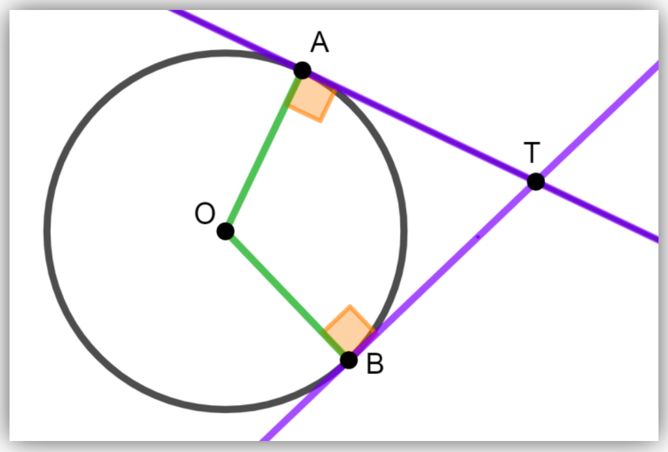


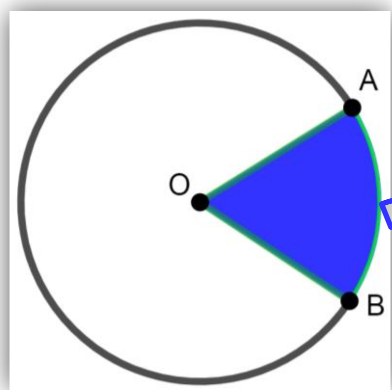
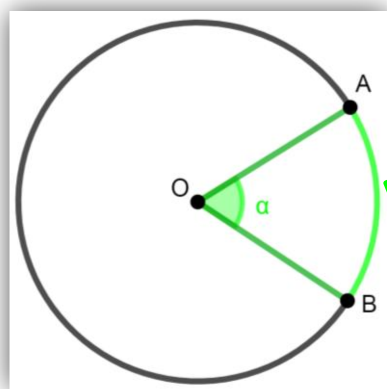
Unghiul înscris în cerc este dublul *unghiului la centru* corespunzător.

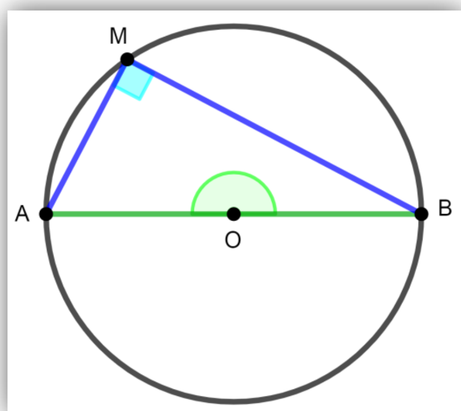
$$\widehat{AOB} = 2 * \widehat{AMB} \Leftrightarrow \widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$$

- Tangenta este dreapta care intersectează cercul într-un punct.
- Printr-un punct T exterior unui cerc pot fi desenate ***două*** drepte tangente cercului dat.
- Raza este ***perpendiculară*** pe tangentă în punctul lor de intersecţie:

$$OA \perp TA \qquad OB \perp TB$$



Aria	Circumferința
$A_c = \pi r^2 (cm^2)$	$C = 2\pi r$
$\cancel{2\pi r^2}$ $\pi = 3,14$	
	$\left. \begin{matrix} C = 2\pi r = 2r\pi \\ d = 2r \end{matrix} \right\vert \Rightarrow C = d\pi$
$\frac{\hat{\alpha}}{360°}$ = o parte dintr – un întreg $\hat{\alpha}$ $(alfa)$ = unghiul la centru $\hat{\alpha} = \widehat{AOB}$	
 **SECTORUL CIRCULAR = o parte din disc (AREE)**	 **ARCUL = o parte din circumferință (PERIMETRU)**
$A_{sector\ circular} = \frac{\hat{\alpha}}{360°} * A_c$ $A_c = aria\ cercului$ **Delimitat de razele OA e OB şi de arcul $\widehat{AB}$**	$l = \frac{\hat{\alpha}}{360°} * C$ **Delimitat de razele OA şi OB**



Diametrul (AB):

– cea mai mare coardă
– trece prin centrul cercului: $[AB] = [AO] + [OB]$
– este dublul razei: $d = 2r$
– determină unghiul la centrul de 180°
–unghiul înscris în cerc corespunzător este de 90°

Metoda reducerii

Pasul 1 Vom ***simplifica ambele ecuații*** şi vom ***aşeza toate necunoscutele unele sub altele*** (x sub x, y sub y şi $rezultatul$ sub $rezultat$)

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ -x + 5y = 9 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{x} \boxed{+ 3y} = \boxed{7} \\ \boxed{-x} \boxed{+ 5y} = \boxed{9} \end{cases} \quad \boxed{1} ☑$$

☑ ☑ ☑

Pasul 2 Determin ce necunoscută vreau să elimin.

Am ales că vom elimina x-ul $\boxed{2}$ ☑

Pasul 3 ***Înmulţesc*** sau ***împart ambele ecuaţii*** până ***necunoscuta de eliminat*** are ***coeficienţi egali*** sau ***coeficienţi opuşi*** în ambele ecuaţii.

$$\begin{cases} \boxed{x} + 3y = 7 \\ \boxed{-x} + 5y = 9 \end{cases}$$

$coeficientul\ 1$

$coeficientul\ -1$

$\boxed{3}$ ☑

Pasul 4 ***Eliminăm necunoscuta aleasă*** ca să o aflăm pe cealaltă.

a) ***Coeficienții*** **necunoscutei alese** sunt ***opuşi*** = ***adun ecuațiile.***

b) ***Coeficienții*** **necunoscutei alese** sunt ***egali*** = ***scad ecuațiile.***

Coeficienții sunt opuşi ☑

Aşadar, vom aduna

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x + 3y = 7 \\ -x + 5y = 9 \end{cases} \quad (+) \\ \hline / \quad 8y = 16 \Rightarrow y = 2 \end{array} \quad \boxed{4} ☑$$

$(+3y) + (+5y) = 3y + 5y = 8y$ $\quad$ $7 + 9 = 16$

Pasul 5 ***Înlocuim necunoscuta aflată*** într-una din cele două ecuaţii iniţiale pentru a afla cealaltă necunoscută (pe cea eliminată).

Am ales să înlocuim în prima ecuaţie: $x + 3 * 2 = 7 \Leftrightarrow x + 6 = 7 \Leftrightarrow x = 7 - 6 = 1$

Soluţia sistemului este: $(x, y) = (1, 2)$ $\boxed{5}$ ☑

Pasul 1 Vom ***simplifica ambele ecuaţii*** şi vom ***aşeza toate necunoscutele unele sub altele*** (x sub x, y sub y şi $rezultatul$ sub $rezultat$)

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ -x + 5y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x} \boxed{+ 3y} = \boxed{7} \\ \boxed{-x} \boxed{+ 5y} = \boxed{9} \end{cases} \quad \boxed{1}\ ☑$$

☑ ☑ ☑

Pasul 2 Determin ce necunoscută vreau să elimin.

Am ales că vom elimina y-ul $\boxed{2}$ ☑

Pasul 3 ***Înmulţesc*** sau ***împart ambele ecuaţii*** până ***necunoscuta de eliminat*** are ***coeficienţi egali*** sau ***coeficienţi opuşi*** în ambele ecuaţii.

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \,|\, * 5 \\ -x + 5y = 9 \,|\, * 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \boxed{+ 15y} = 35 \\ -3x \boxed{+ 15y} = 27 \end{cases} \quad \begin{matrix} \boxed{coeficientul\ 15} \\ \boxed{coeficientul\ 15} \end{matrix} \quad \boxed{3}\ ☑$$

Pasul 4 ***Eliminăm necunoscuta aleasă*** ca să o aflăm pe cealaltă.

Coeficienţii sunt **egali** ☑

Aşadar, vom scădea cele două ecuaţii.

c) ***Coeficienţii*** necunoscutei alese sunt ***opuşi*** = ***adun ecuaţiile.***

d) ***Coeficienţii*** necunoscutei alese sunt ***egali*** = ***scad ecuaţiile.***

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 5x + 15y = 35 \\ -3x + 15y = 27 \end{cases} \\ \hline 8x \quad / \quad = 8 \end{array} (-) \Rightarrow x = 1 \quad \boxed{4}\ ☑$$

$$(5x) - (-3x) = 5x + 3x = 8x \qquad 35 - 27 = 8$$

Pasul 5 ***Înlocuim necunoscuta aflată*** într-una din cele două ecuaţii iniţiale pentru a afla cealaltă necunoscută (pe cea eliminată).

Am ales să înlocuim în prima ecuaţie: $1 + 3y = 7 \Leftrightarrow 3y = 6 \Leftrightarrow y = 6 : 3 = 2$

Soluţia sistemului este: $(x, y) = (1, 2)$ $\boxed{5}$ ☑

Intervale

***Intervalele folosesc drept notaţie parantezele rotunde şi parantezele pătrate în locul acoladelor!!!

Intervalele sunt definite de ***inecuaţii sau definesc ***inecuaţii***!!!

1. ***Parantezele rotunde*** **“(“ şi “)”**

   - **Corespund semnelor:** $\begin{cases} < \ -(strict)\ mai\ mic \\ > \ -(strict)\ mai\ mare \end{cases}$
   - **sunt folosite *întotdeauna* pentru** $-\infty$ **şi** $+\infty$
   - **mai sunt numite şi *paranteze deschise*** ⇔ ***uşi deschise***


fuge, deci NU mai este in interval

2. ***Parantezele pătrate*** **“[“ si “]”**

   - **Corespund semnelor:** $\begin{cases} \le \ -mai\ mic\ sau\ \boxed{egal} \\ \ge \ -mai\ mare\ sau\ \boxed{egal} \end{cases}$
   - **mai sunt numite şi *paranteze închise*** ⇔ ***uşi închise***


NU fuge, deci ESTE in interval

Prof. Claudiu Tamaş

OBS! În intervale, <u>extremitatea de la stânga</u> e întotdeauna <u>mai mică</u> decât <u>extremitatea de la dreapta</u>!!!

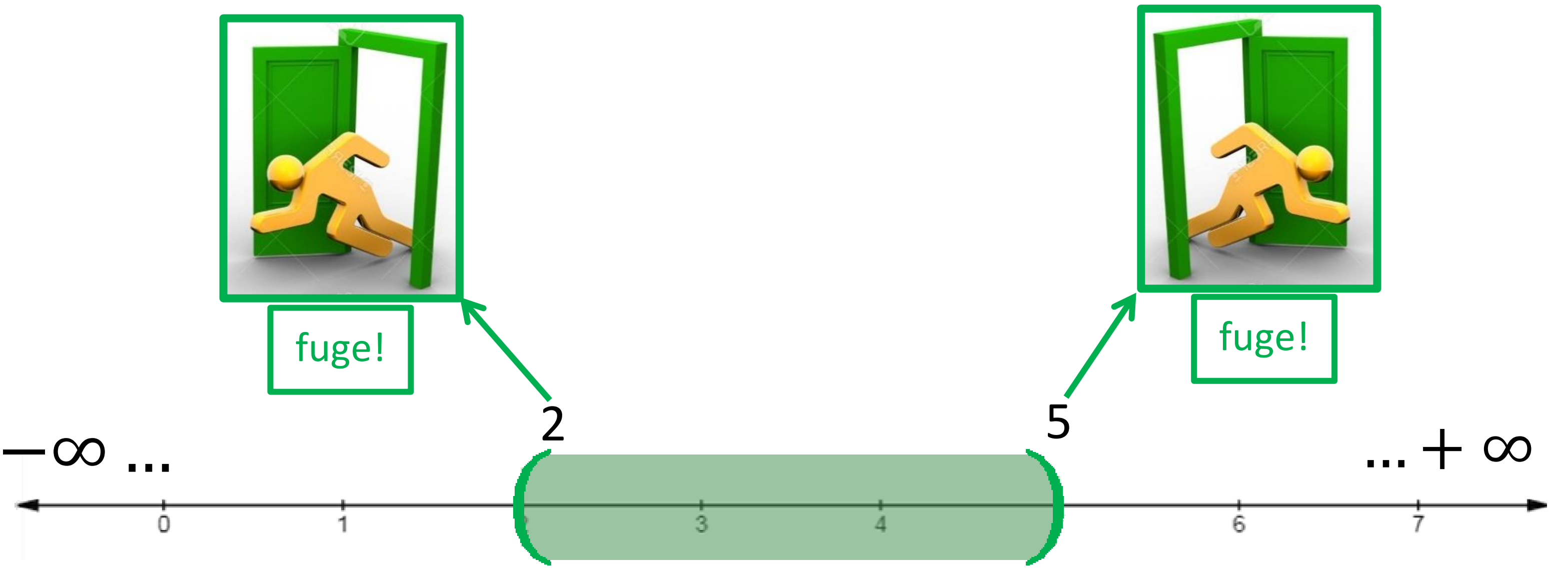
<u>*Tipuri de intervale*</u>

1. <u>Interval deschis</u>

a)

$$\mathbf{x} \in (2, 5)$$

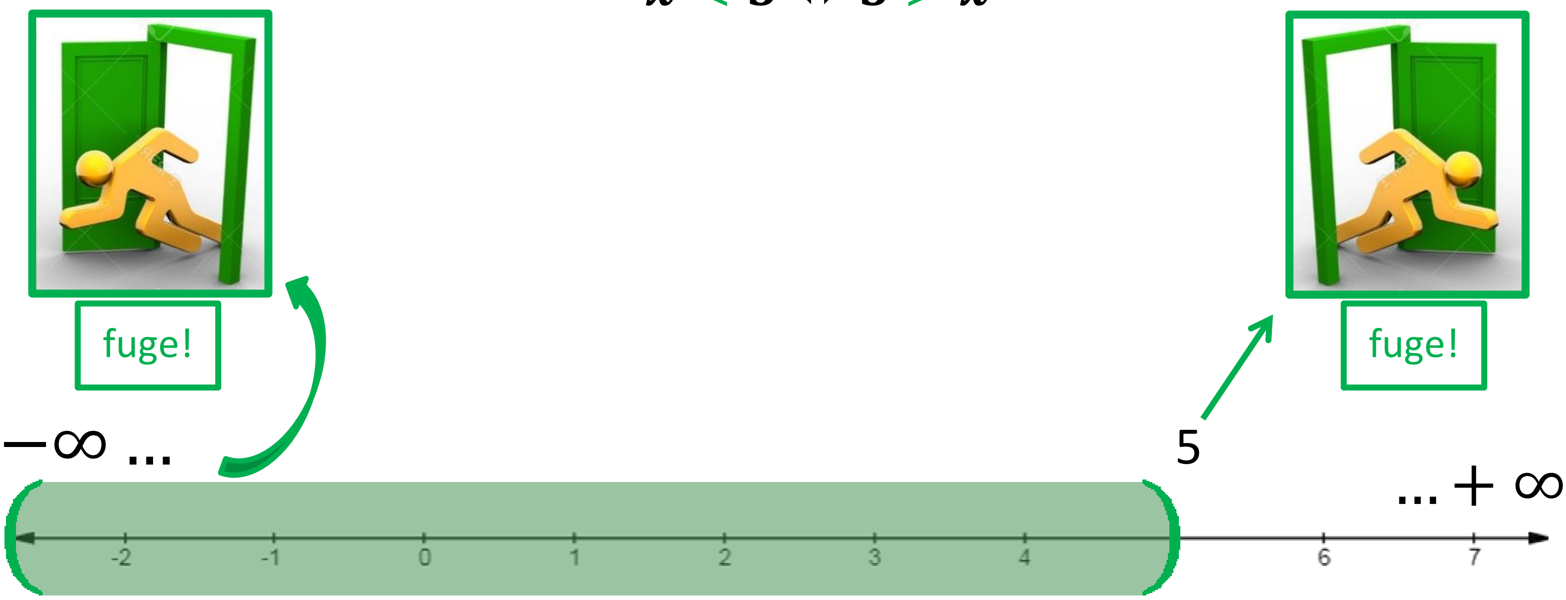
$$2 < x < 5 \Leftrightarrow 5 > x > 2$$



b)

$$\mathbf{x} \in (-\infty, 5)$$

$$x < 5 \Leftrightarrow 5 > x$$



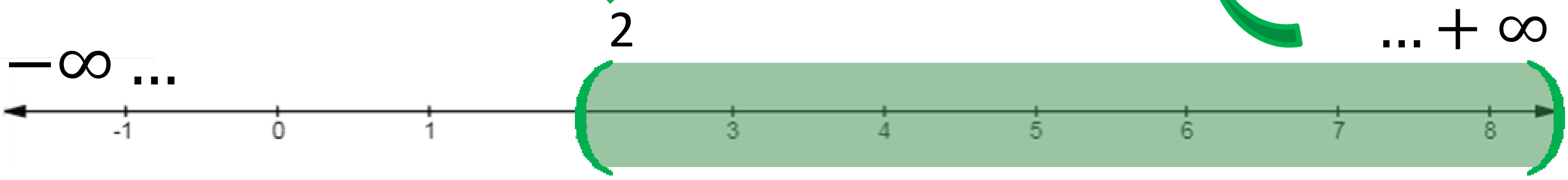
c)

$$x \in (2, +\infty)$$

$$x > 2 \Leftrightarrow 2 < x$$

fuge!

fuge!



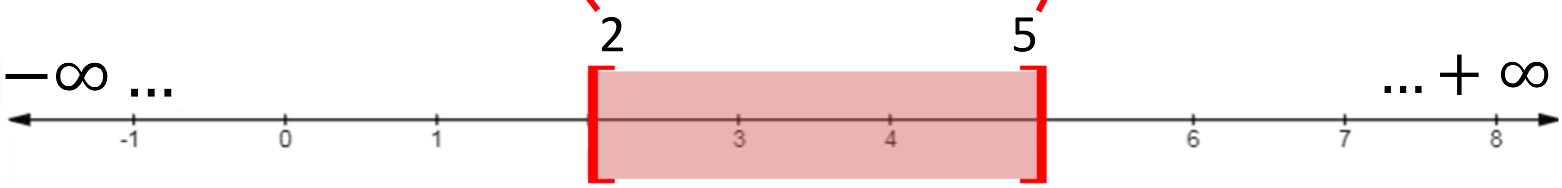
2. *Interval închis*

$$x \in [2, 5]$$

$$2 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 5 \geq x \geq 2$$

NU fuge!

NU fuge!

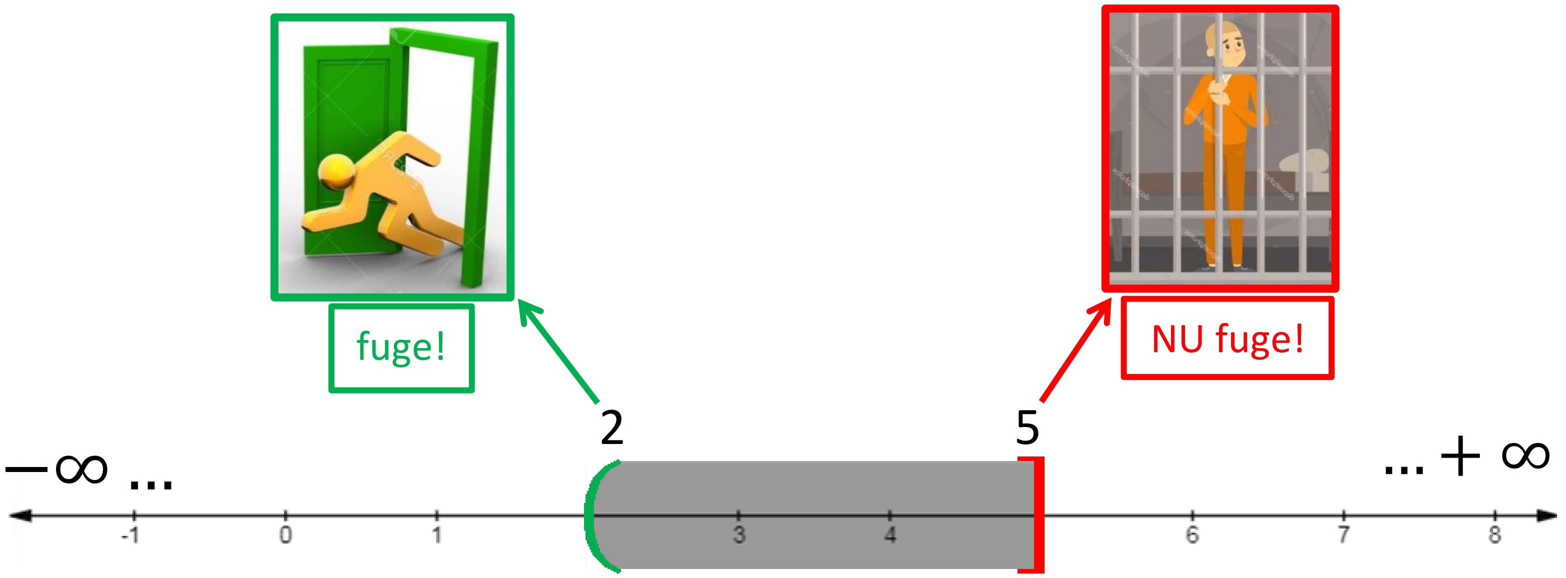


3. Interval deschis la stânga si închis la dreapta

a)

$$\mathbf{x} \in (2, 5]$$

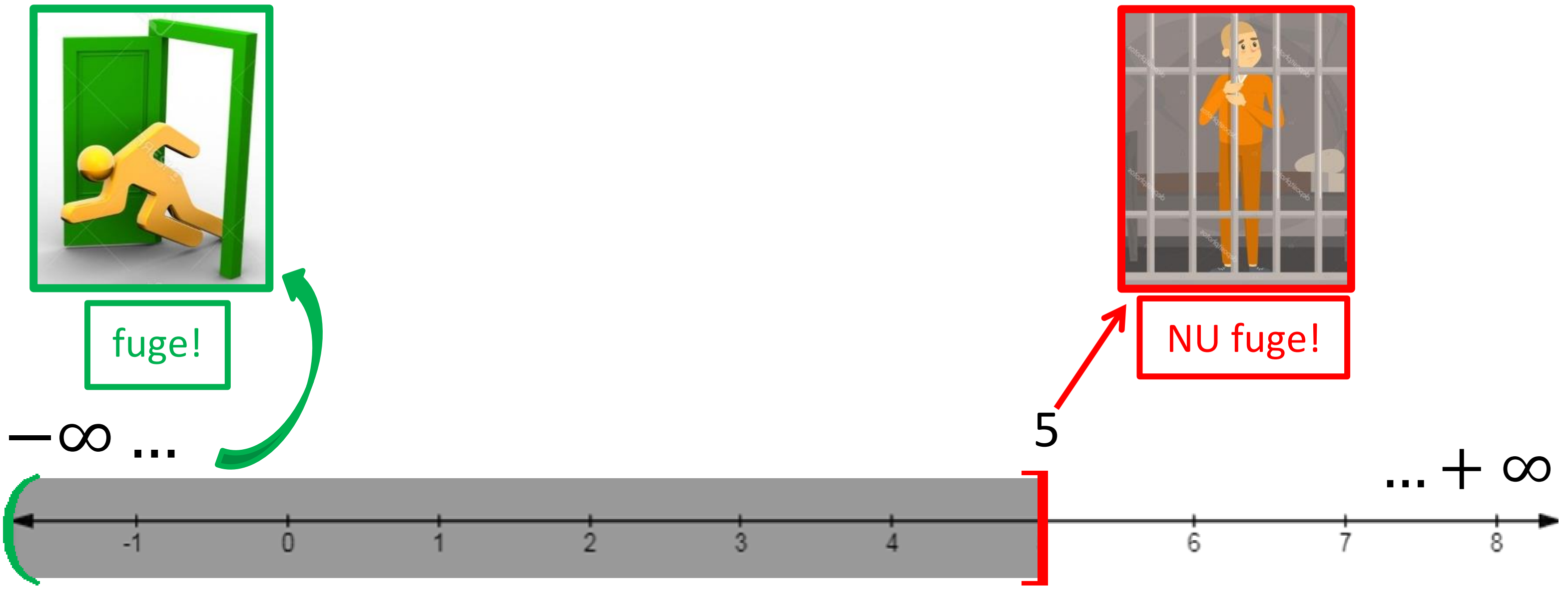
$$2 < x \leq 5 \Leftrightarrow 5 \geq x > 2$$



b)

$$\mathbf{x} \in (-\infty, 5]$$

$$x \leq 5 \Leftrightarrow 5 \geq x$$

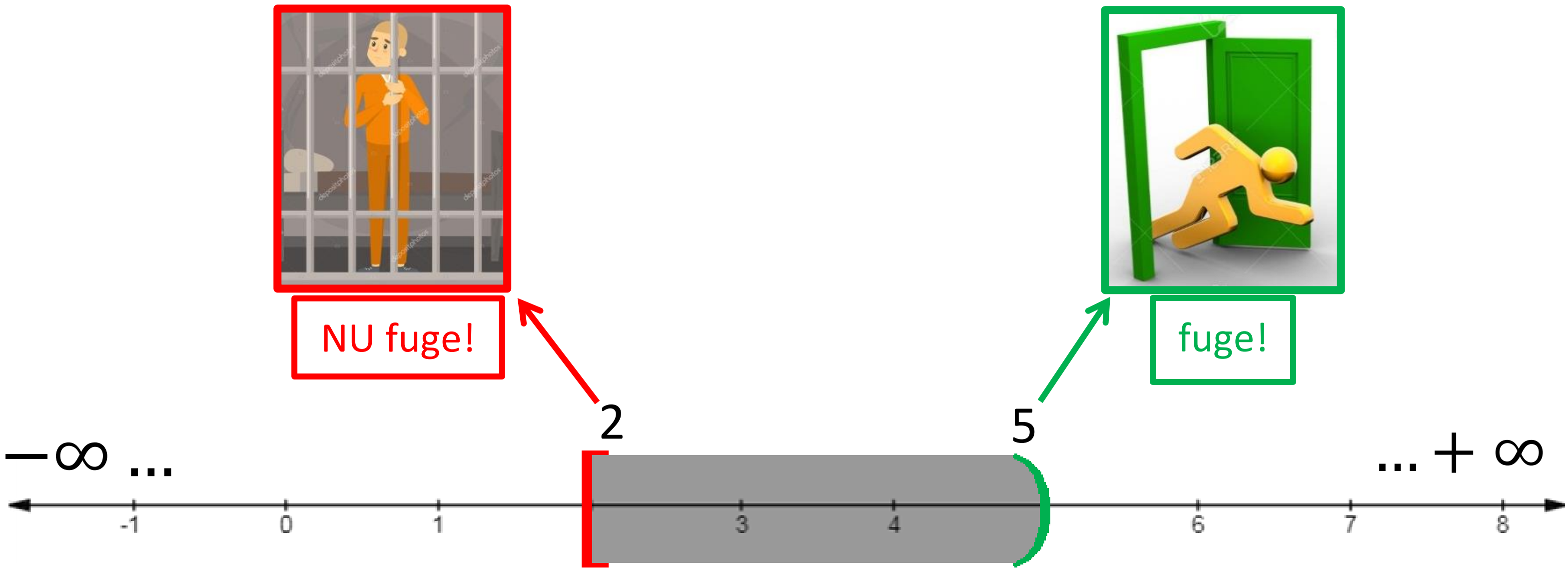


Prof. Claudiu Tamaş

4. Interval închis la stânga si deschis la dreapta

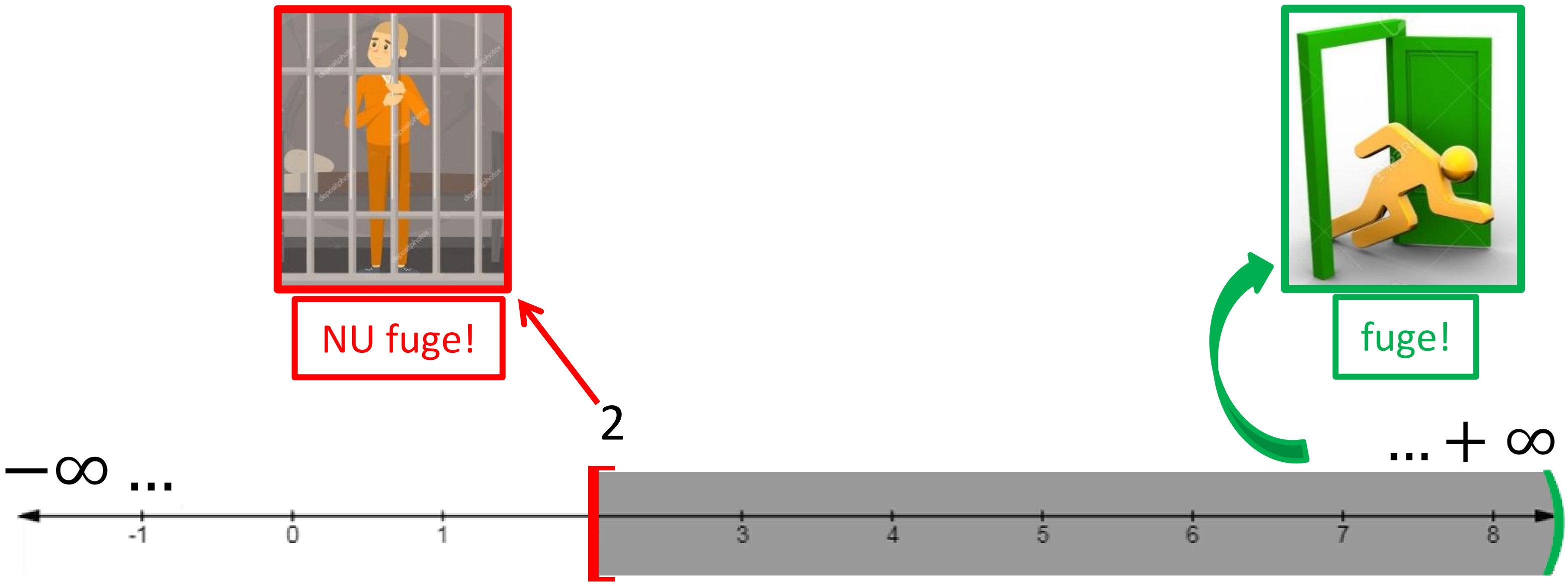
a) $\mathbf{x} \in [2, 5)$

$$2 \leq x < 5 \Leftrightarrow 5 > x \geq 2$$



b) $\mathbf{x} \in [2, +\infty)$

$$x \geq 2 \Leftrightarrow 2 \leq x$$



Prof. Claudiu Tamaş

Rezolvarea inecuaţiilor

<u>*Mersul direct*</u> > < <u>*Mersul invers*</u>

La mersul direct efectuăm:

1. Înmulţirea şi împărţirea
2. Adunarea şi scăderea

<u>La mersul invers inversăm:</u>

<u>1. Adunarea şi scăderea</u>

<u>2. Înmulţirea şi împărţirea</u>

<u>Metoda transportului</u>	**<u>Principiile de echivalenţă</u>**
$3x - 1 = 2$ $3x = 2 + 1$ $3x = 3$ $x = 3 : 3$ $x = 1$	$3x - 1 = 2 \mid + 1$ $3x - 1 + 1 = 2 + 1$ $3x = 3$ $3x = 2 + 1$ $3x = 3 \mid : 3$ $3x : 3 = 3 : 3$ $x = 1$

<u>*Principiile de echivalenţă*</u>

1. <u>Primul principiu de echivalenţă</u> *= adunând sau scăzând acelaşi nr. din ambii membri, se creează o nouă ecuație identică cu cea inițială.*	***2. <u>Al doilea principiu de echivalenţă</u>*** *= înmulțind sau împărţind acelaşi nr. la ambii membri, se creează o nouă ecuație identică cu cea iniţială în care* **<u>toate elementele</u>** *(monoamele) se înmulțesc sau se împart cu acel număr.*
$3x + 5 = 7 \mid - 5$ $3x + 5 - 5 = 7 - 5$ $3x = 2$	$4x + 8 = 2 \mid : 2$ $4x : 2 + 8 : 2 = 2 : 2$ $2x + 4 = 1$
$3x - 5 - 2x = 3x - 2 \mid + 5$ $3x - 5 - 2x + 5 = 3x - 2 + 5$ $3x - 2x = 3x + 3$	$-4x - 8 = -4x + 2 \mid * (-1)$ $-4x * (-1) - 8 * (-1) = -4x * (-1) + 2 * (-1)$ $4x + 8 = 4x - 2$

¡! ¡! ¡! ***Inecuaţiile*** se rezolvă ***identic*** cu ***ecuaţiile***, cu o *singură excepţie*:

➔ Dacă **înmulţim** sau **împărţim** inecuația **cu un număr negativ**, se schimbă atât semnele elementelor, ***cât şi semnul de comparaţie.***

➔ $-2x < 4 \mid : (-2)$ $x > -2$	➔ $-x > 3 \mid * (-1)$ $x < -3$

Inecuație	Ecuație
$3x - 1 < 2 \mid + 1$	$3x - 1 = 2$
$3x < 2 + 1$	$3x = 2 + 1$
$3x < 3$	$3x = 3$
$3x < 3 \mid : 3$	$3x = 3$
$x < 3 : 3$	$x = 3 : 3$
$x < 1$	$x = 1$

Membrul din stânga

Membrul central

Membrul din dreapta

$$2 \leq \underbrace{x - 3} \leq 5 \mid + 3$$

$$2 + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 5 + 3$$

$$5 \leq x \leq 8$$

$$x \in [5,8]$$

Adăugăm 3 $(+3)$ la fiecare dintre cei trei membri ai inecuaţiei

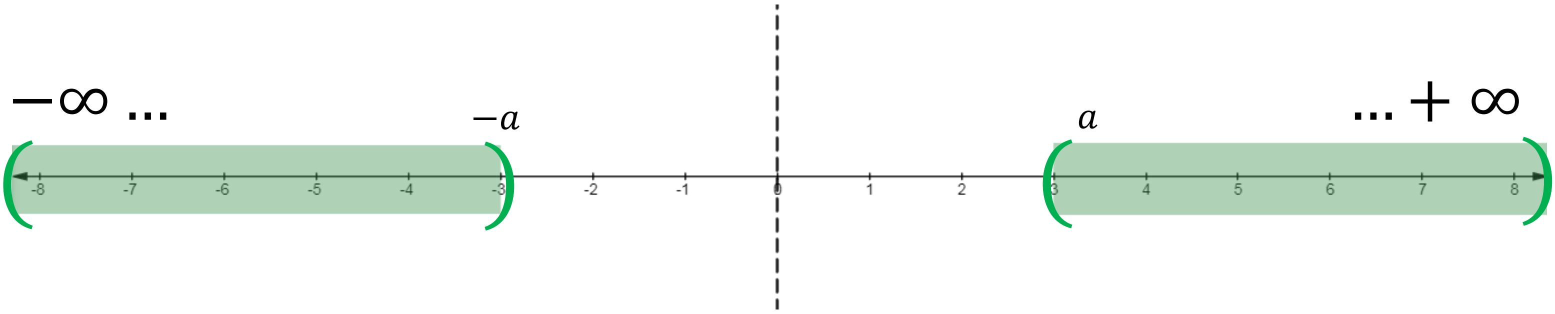
Rezolvare inecuații cu module

~Intervale simetrice~

I.

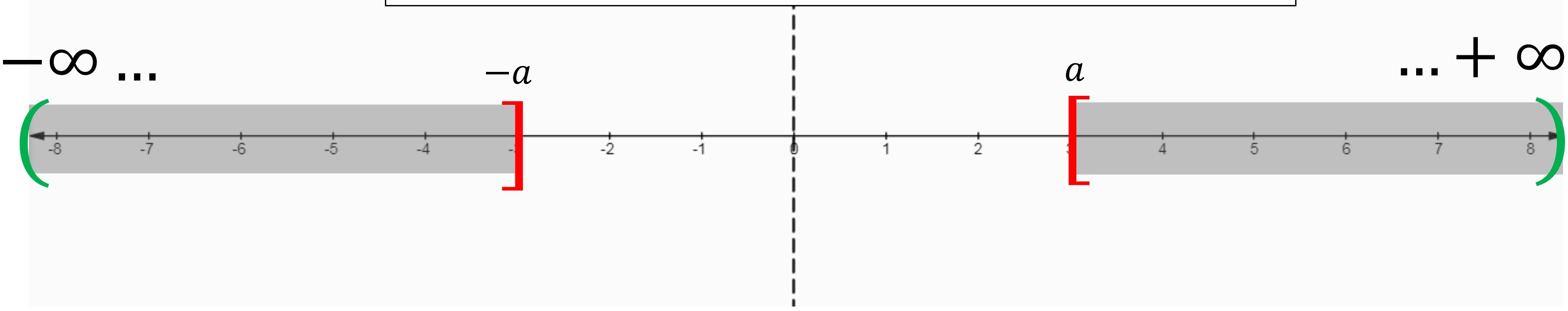
a.

$$|x| > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (a, +\infty) \\ x \in (-\infty, -a) \end{cases}$$

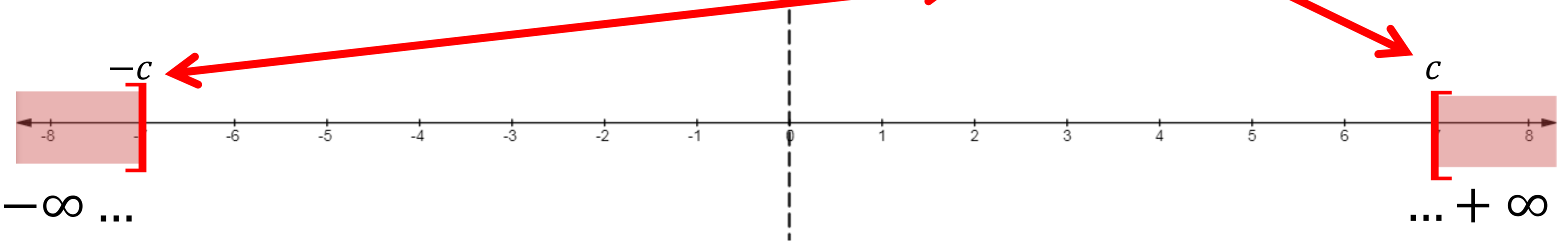


b.

$$|x| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a, +\infty) \\ x \in (-\infty, -a] \end{cases}$$



Exemplu: $|ax+b| \geq c \Leftrightarrow \begin{cases} ax+b \geq c \\ ax+b \leq -c \end{cases}$

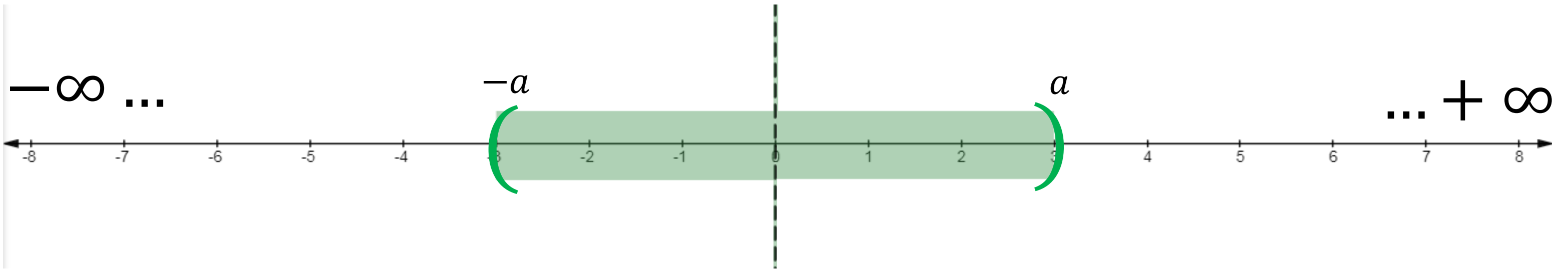


II.

a.

$$|x| < a$$

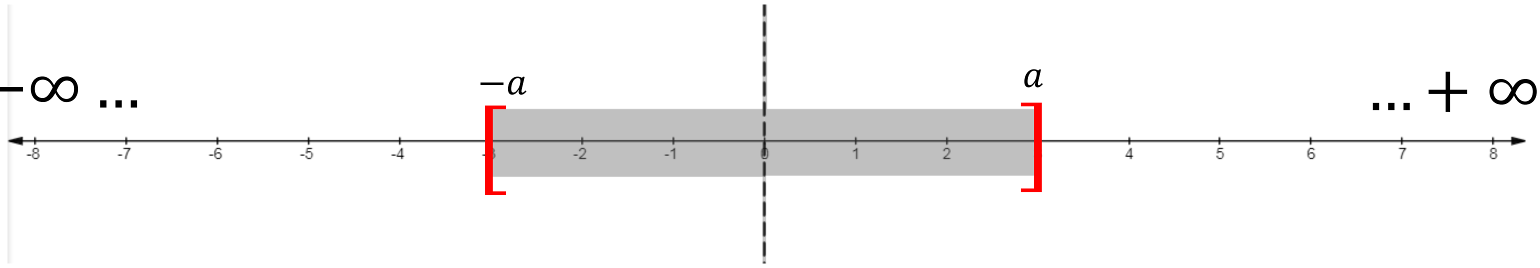
$$-a < x < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$$



b.

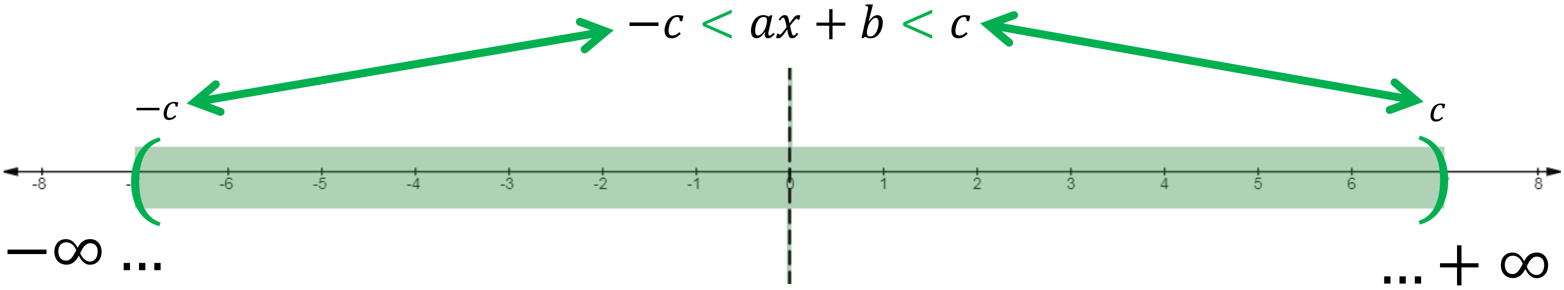
$$|x| \leq a$$

$$-a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$$



$$|ax + b| < c$$

$$-c < ax + b < c$$



Planul cartezian

În planul cartezian se regăsesc o infinitate de puncte.

Fiecare punct are ***două coordonate***:

- **Prima coordonată** se numeşte **abscisa** -> reprezentată **de x (doarme)**
- **A doua coordonată** se numeşte **ordonata** -> reprezentată **de y (stă trează)**

Axa Ox = axa absciselor **Axa Oy = axa ordonatelor**

Domeniul funcţiei este mulţimea de elemente din care x ia valori.

Codomeniul funcţiei este mulţimea de elemente din care y ia valori.

definită pe cu valori în

$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ (se citeşte "$\boldsymbol{f}$ definită pe $\boldsymbol{D}$ cu valori în $\boldsymbol{C}$")

domeniul codomeniul

$$\boldsymbol{f} : \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\} \to \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$$

("$\boldsymbol{f}$ definită pe mulțimea $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ cu valori în mulțimea $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$")

I. Valoarea funcţiei pentru o valoare a lui x

****** Se înlocuieşte x în funcţie cu valoarea corespunzătoare.***

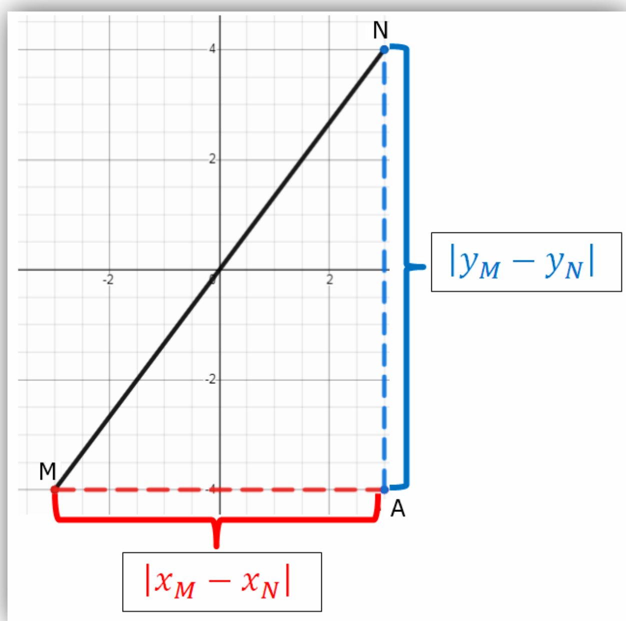
II. Apartenenţa unui punct la o dreaptă

OBSERVAŢIE!!! $\boxed{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{y}$

Un punct $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_A}, \boldsymbol{y_A}) \in \boldsymbol{G_f}$ dacă $\boxed{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_A})} = \boldsymbol{y_A}$

III. *Distanţa dintre două puncte (din planul cartezian)*

Fie punctele $M(x_M, y_M)$ $N(x_N, y_N)$



$$i^2 = c_1^2 + c_2^2$$

$$i = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$\textbf{Formula}: \boxed{d(M,N) = \overline{MN} = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}}$$

IV. *Mijlocul segmentului format de două puncte:*

Fie $\overline{AB}$ ***cu*** $A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$

$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ **= are drept coordonate media aritmetică a coordonatelor celor două puncte.**

!!! Centrul de simetrie reprezintă mijlocul segmentului determinat de cele două puncte simetrice!!!

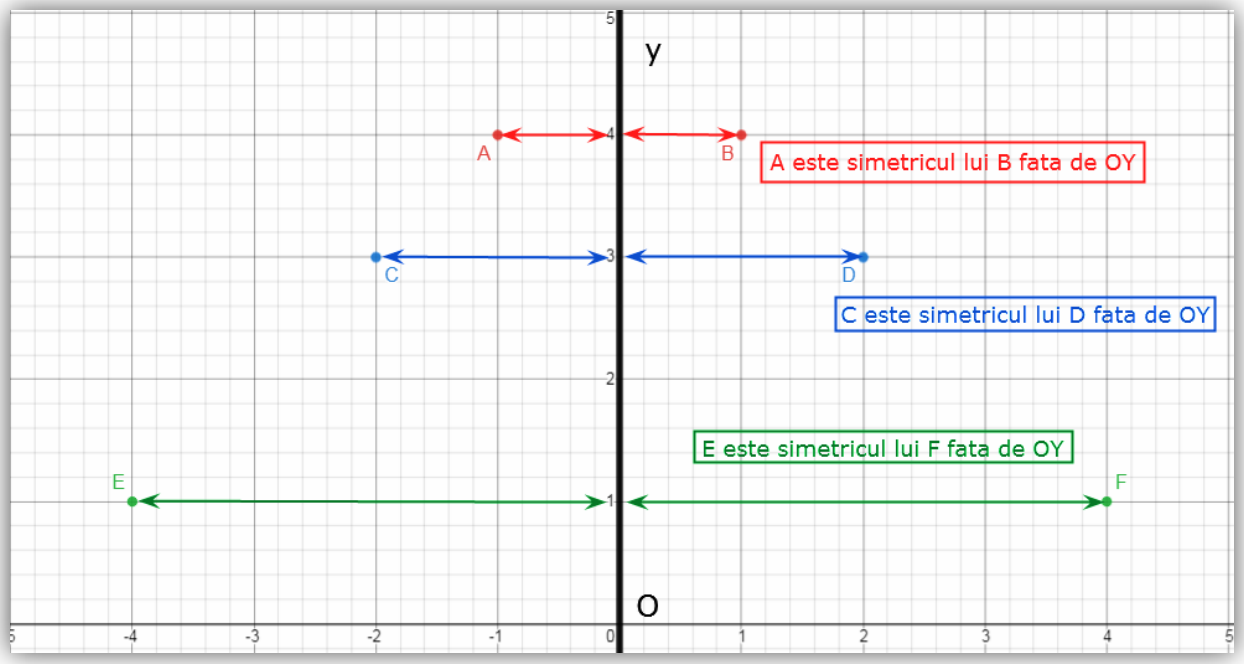
M este mijlocul segmentului AB ⇔ A este simetricul lui B ***faţă de M***

M este mijlocul segmentului AB ⇔ B este simetricul lui A ***faţă de M***

V. ***Simetria axială (față de o axă)***

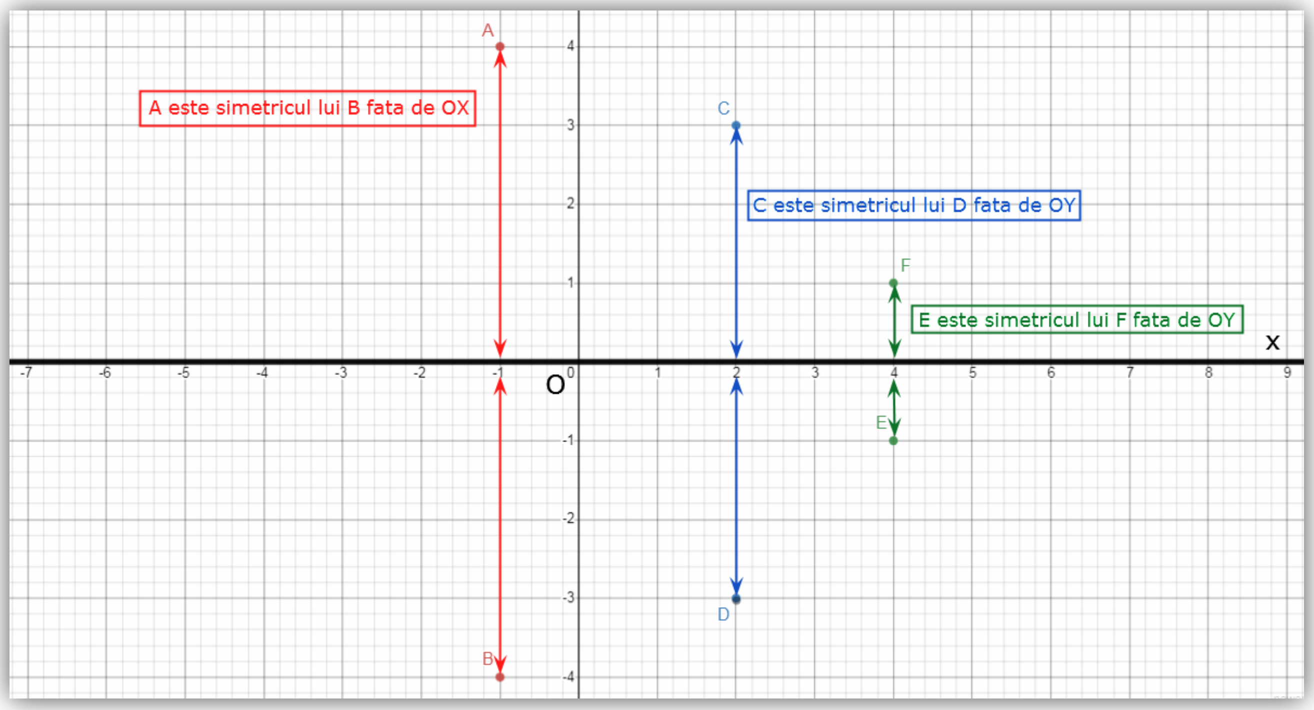
a. ***Axa de simetrie***: ***Oy***

Punctele se află la ***aceeaşi distanță*** față de ***axa Oy***, unul pe o parte, celălalt pe cealaltă parte a axei.



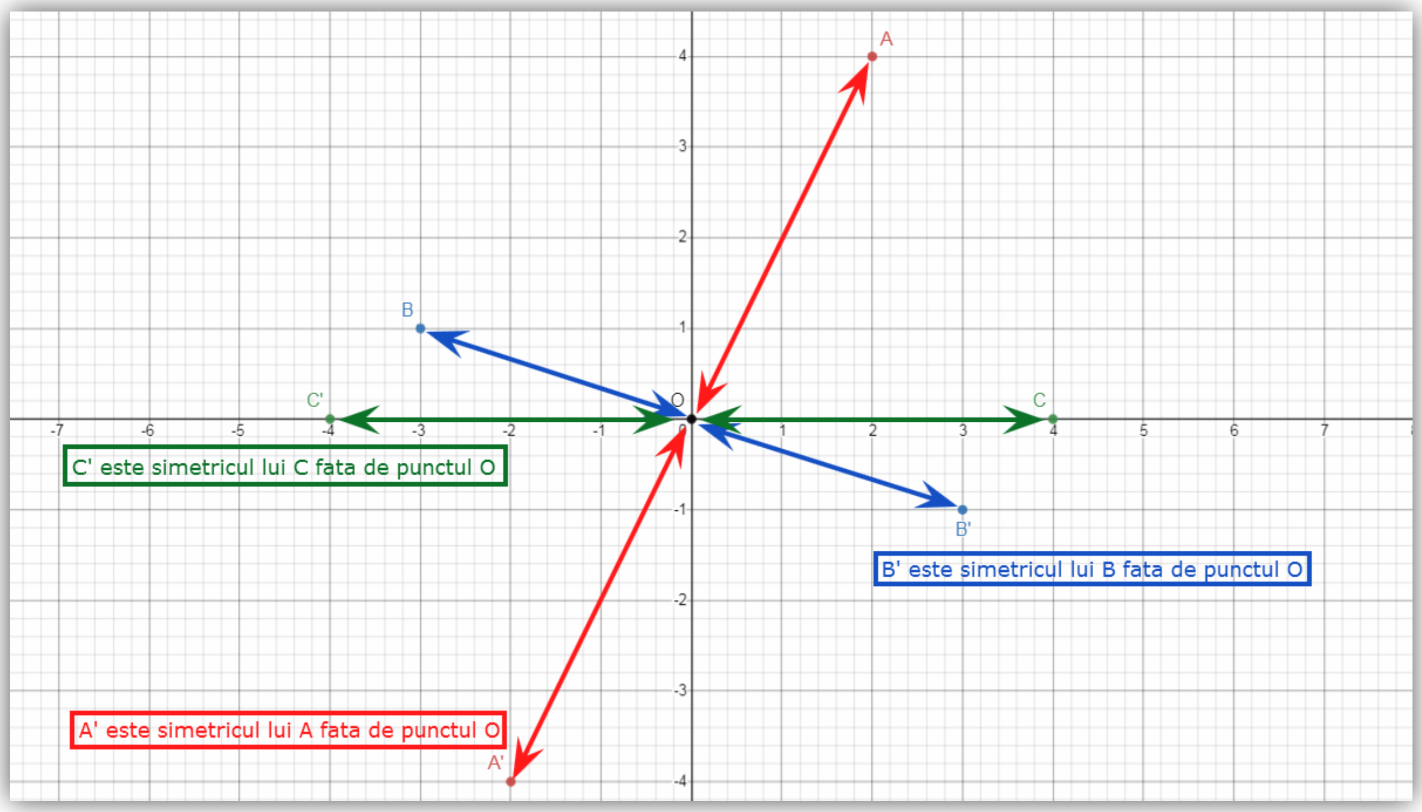
b. ***Axa de simetrie***: ***Ox***

Punctele se află la ***aceeaşi distanță*** față de ***axa Ox***, unul pe o parte, celălalt pe cealaltă parte a axei.



VI. ***Simetria centrală (faţă de un punct numit centru)***

Punctele se află la ***aceeaşi distanţă*** faţă de ***centru*** (aici, ***punctul O***), unul pe o parte, celălalt pe cealaltă parte a punctului.



!!! Centrul de simetrie reprezintă mijlocul segmentului determinat de cele două puncte simetrice!!!

VII. ***Intersecţia funcţiei cu axa Ox (axa absciselor)***

$f(x) \cap Ox => \boxed{f(x)} = y = 0$ $\boxed{\text{sau}}$ $G_f \cap Ox => \boxed{f(x)} = y = 0$

VIII. ***Intersecţia funcţiei cu axa Oy (axa ordonatelor)***

$f(x) \cap Oy => x = 0$ $\boxed{\text{sau}}$ $G_f \cap Oy => x = 0$

IX. *Desenarea graficului funcţiei*

****** Pentru a desena graficul funcţiei, avem nevoie doar de două puncte!!!***

a. Folosind intersecţiile cu axele de coordonate

$G_f \cap Ox \Rightarrow \boxed{f(x)} = y = 0$	$G_f \cap Oy \Rightarrow x = 0$
Se rezolvă cele două ecuații şi se află punctele de intersecție ale graficului cu planul cartezian.	

X. *Intersecţia dintre două funcţii*

a. Se egalează cele două funcţii şi se află abscisa (x-ul) punctului de intersecţie:

$\boxed{f(x)} = \boxed{g(x)}$

b. Se înlocuiește abscisa aflată într-una dintre cele două funcţii pentru a afla ordonata corespunzătoare.

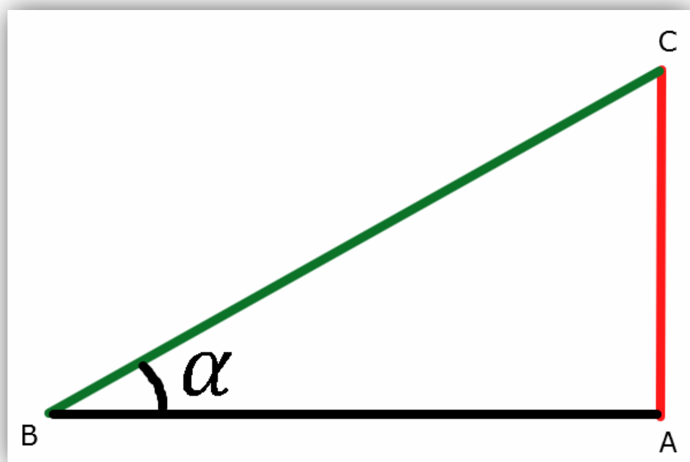
1. Fie funcţia $f : R \to R, \boxed{f(x)}$ şi $g : R \to R, \boxed{g(x)}$. Determinaţi punctul de intersecţie al celor două funcţii.

a. Egalăm cele două funcţii: $\boxed{f(x)} = \boxed{g(x)}$ $Aflam\ x.$	**b. Înlocuim x -ul aflat în una din cele două funcţii:** $y = \boxed{f(x)} = \boxed{g(x)}$
$G_f \cap G_g = A(x, y)$	

Noțiuni de trigonometrie

1. Sinus (SOI)

Într-un triunghi dreptunghic, sinusul unui unghi (α) este egal cu raportul dintre cateta opusă (AC) şi ipotenuză (BC).



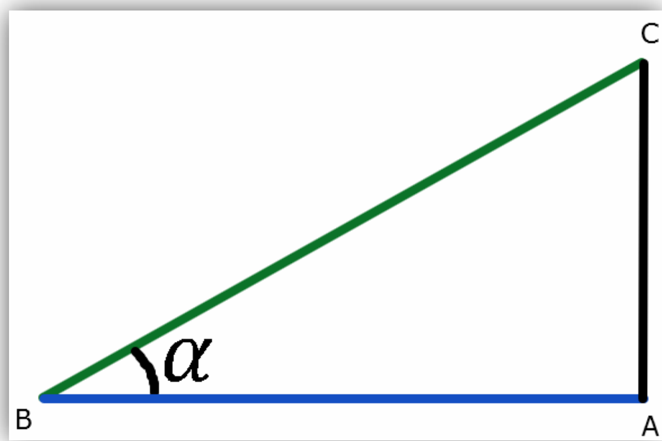
$$\sin\hat{\alpha} = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}}$$

$$\sin\hat{\alpha} = \frac{AC}{BC}$$

$\hat{\alpha}$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\hat{\alpha}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\cos\hat{\alpha}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$

2. Cosinus (CAI)

Într-un triunghi dreptunghic, cosinusul unui unghi (α) este egal cu raportul dintre cateta alăturată (AB) şi ipotenuza (BC).

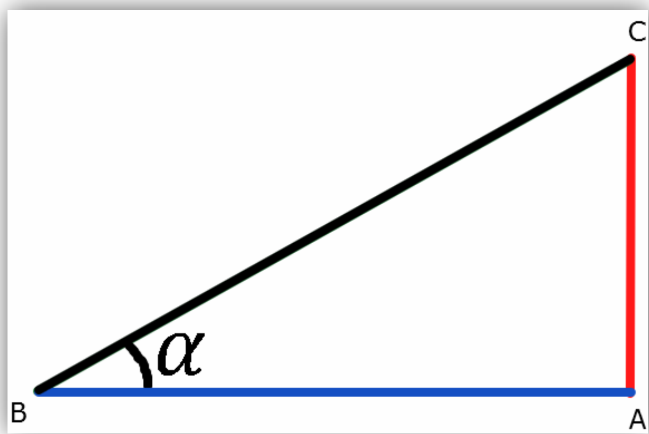


$$\cos\hat{\alpha} = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}}$$

$$\cos\hat{\alpha} = \frac{AB}{BC}$$

3. Tangenta (TOA)

Într-un triunghi dreptunghic, tangenta unui unghi ($\boldsymbol{\alpha}$) este egală cu raportul dintre cateta opusă (AC) şi cateta alăturată (AB).



$$\operatorname{tg}\hat{\alpha} = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}}$$

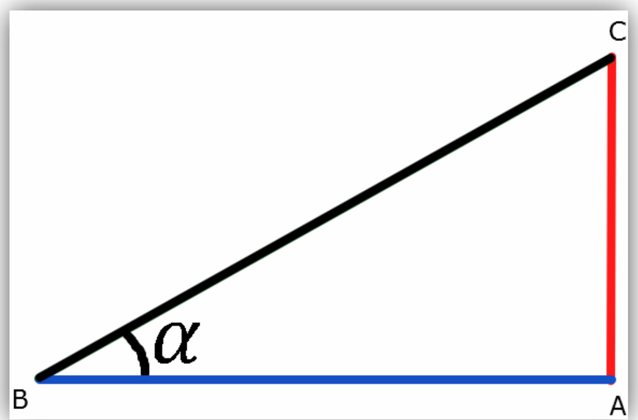
$$\operatorname{tg}\hat{\alpha} = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{tg}\hat{\alpha} = \frac{\sin\hat{\alpha}}{\cos\hat{\alpha}} = \frac{\frac{o}{i}}{\frac{a}{i}} = \frac{o}{\cancel{i}_{1}} * \frac{\cancel{i}^{1}}{a} = \frac{o}{a} \Rightarrow \operatorname{ctg}\hat{\alpha} = \frac{\cos\hat{\alpha}}{\sin\hat{\alpha}} = \frac{a}{o}$$

$\hat{\alpha}$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\operatorname{tg}\hat{\alpha}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\operatorname{ctg}\hat{\alpha}$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4. Cotangenta (CAO)

Într-un triunghi dreptunghic, cotangenta unui unghi ($\boldsymbol{\alpha}$) este egală cu raportul dintre cateta alăturată (AB) şi cateta opusă (AC)



$$\operatorname{ctg}\hat{\alpha} = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$$

$$\operatorname{ctg}\hat{\alpha} = \frac{AB}{AC}$$

Formule de calcul prescurtat

Pătratul binomului: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Suma ori diferența:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2 * 2x * 1 + 1^2 = (2x - 1)^2$

Puterea negativă:

- Puterea negativă ***inversează baza*** ***FĂRĂ*** ***să îi schimbe semnul***
- In schimb, când se inversează baza, se schimbă ***semnul puterii***

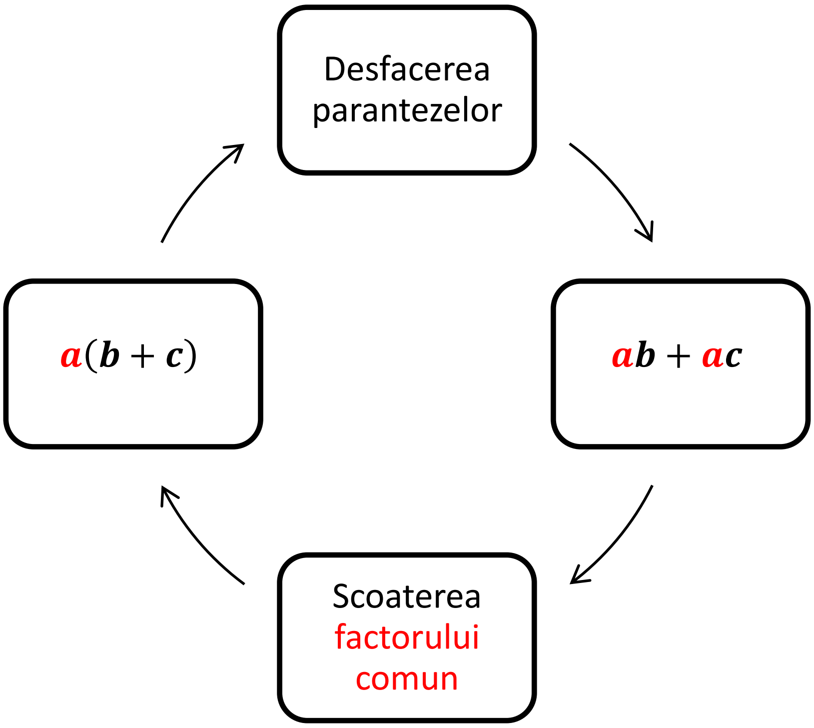
$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{2}{1}\right)^{3} = -8$$

$$(-10)^{-2} = \left(-\frac{10}{1}\right)^{-2} = \left(-\frac{1}{10}\right)^{2} = \left(-\frac{1}{10}\right)\left(-\frac{1}{10}\right) = +\frac{1}{100}$$

Descompunerea în factori

Scoaterea factorului comun total (se scoate factor comun din toate produsele)

$ab + ac = a(b + c)$



Scoaterea factorului comun parțial (se scoate factor comun dintr-un grup de produse)

$$ax + bx + aj + bj = x(a+b) + j(a+b) = (a+b)(x+j)$$

$$ax + bx + aj + bj = a(x+j) + b(x+j) = (x+j)(a+b)$$

Formule de calcul prescurtat ⇔ Descompunerea polinomului

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow \boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 + 2 * 2x * 1 + 1^2 = (2x-1)^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow \boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2}$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = x^2 - 2 * x * 2y + (2y)^2 = (x-2y)^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow \boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

$$4x^2 - 9y^4 = (2x)^2 - (3y^2)^2 = (2x+3y^2)(2x-3y^2)$$

Descompunerea (folosind formula sumei şi a produsului)

$$x^2 + sx + p = (x+x_1)(x+x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 * x_2 = p \end{cases}$$

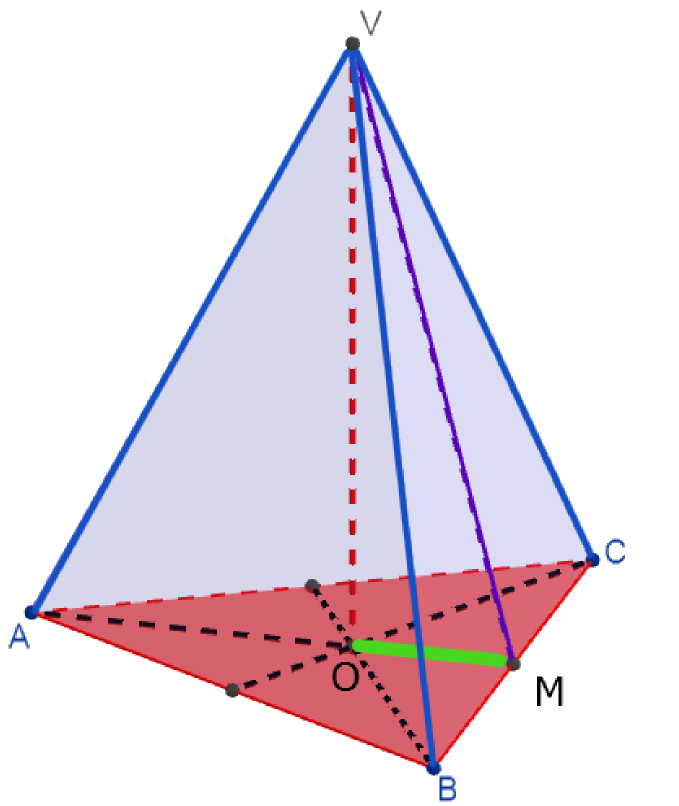
$$x^2 + 3x + 2 = x^2 + 1x + 2x + 2 = x(x+1) + 2(x+1) = (x+1)(x+2)$$

$$\begin{cases} 1 + 2 = 3 \\ 1 * 2 = 2 \end{cases}$$

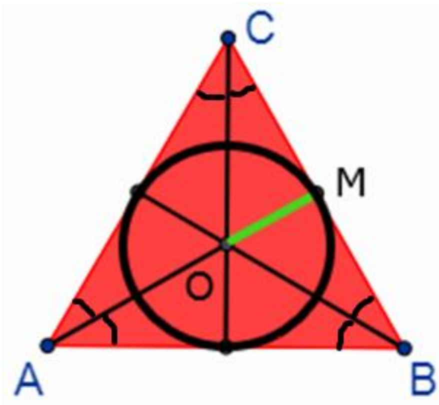
$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x-3) - 2(x-3) = (x-3)(x-2)$$

$$\begin{cases} (-2) + (-3) = -5 \\ (-2) * (-3) = 6 \end{cases}$$

Apotema piramidei. Apotema bazei. Secţiuni



Piramida triunghiulară regulată



1. ***Apotema piramidei: VM***

Proiecţia apotemei piramidei pe bază determină apotema bazei: OM

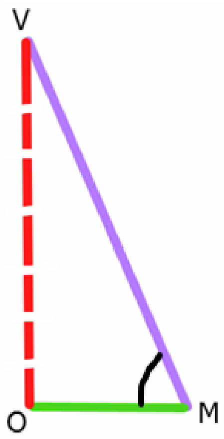
Apotema bazei este *raza cercului înscris triunghiului (r)*.

Centrul cercului înscris triunghiului este determinat de ***intersecţia bisectoarelor.***

!!! Cel mai probabil, baza va fi triunghi echilateral!!!

(DOAR) **Dacă** baza este triunghi echilateral, atunci bisectoarele corespund medianelor => apotema bazei este o treime din bisectoare (care e aceeaşi cu mediana, înălţimea şi mediatoarea).

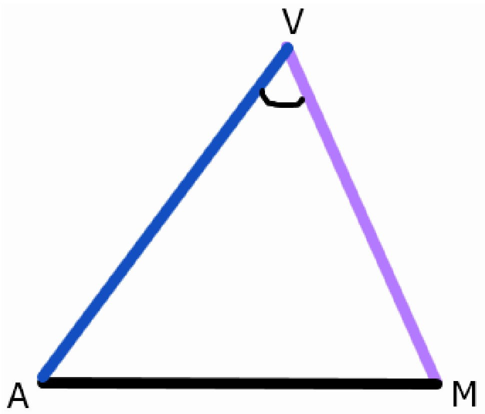
$$OM = \frac{1}{3} * AM$$



Unghiul dintre apotema piramidei şi planul bazei

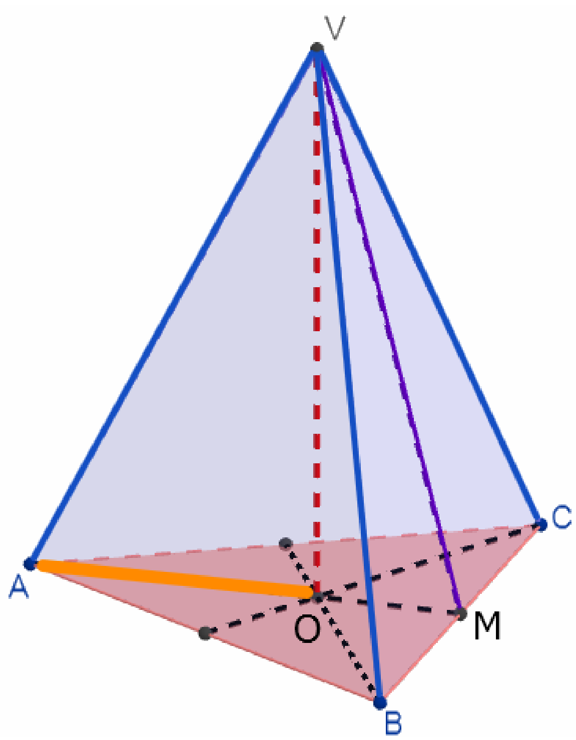
$$\sphericalangle(\boldsymbol{VM},(ABC)) = \widehat{VMO}$$

<u>Secţiunea axială</u> *(secţiunea care trece prin axa de simetrie a bazei - AM)*

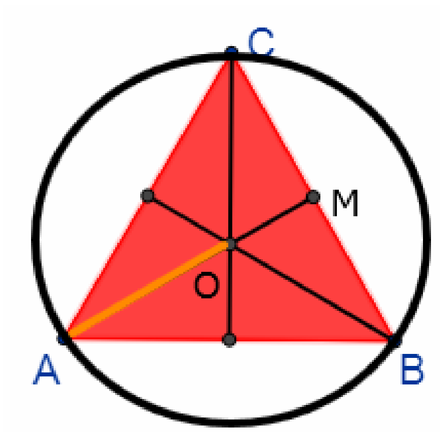


Unghiul dintre muchia piramidei şi planul lateral 'opus':

$$\sphericalangle(\boldsymbol{VA},(VBC)) = \widehat{AVM}$$



Piramida triunghiulară regulată



2. Muchia laterală a piramidei: VA

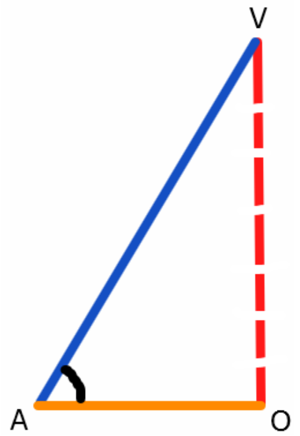
Proiecţia muchiei laterale a piramidei coincide cu *raza cercului circumscris triunghiului (R)*: AO

Centrul cercului circumscris triunghiului este determinat de ***intersecţia mediatoarelor.***

!!! Cel mai probabil, baza va fi triunghi echilateral!!!

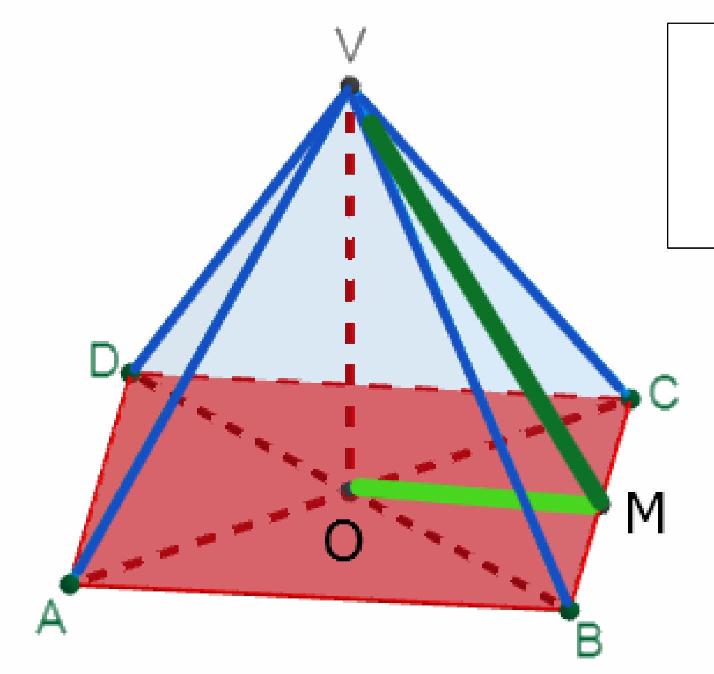
(DOAR) **Dacă** baza este triunghi echilateral, atunci mediatoarele corespund medianelor => raza cercului circumscris este două treimi din mediatoare (care e aceeaşi cu mediana, înălțimea şi bisectoarea).

$$AO = \frac{2}{3} * AM$$

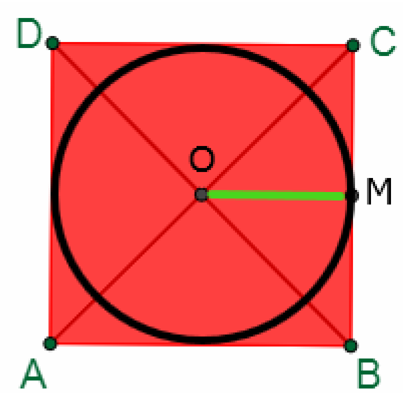


Unghiul dintre muchia piramidei şi planul bazei

$$\sphericalangle(\boldsymbol{VA}, (ABC)) = \widehat{VAO}$$



Piramida patrulateră regulată



3. Apotema piramidei: VM

Proiecţia apotemei piramidei pe bază determină apotema bazei: OM

Apotema bazei este *raza cercului înscris pătratului*.

Centrul cercului înscris pătratului este determinat de ***intersecţia diagonalelor.***

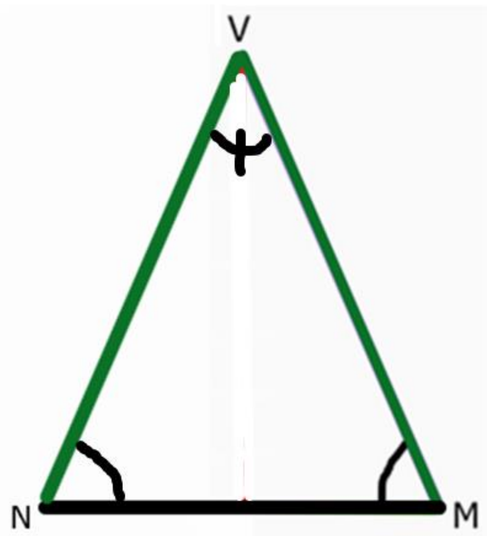
Apotema bazei este jumătate din latura pătratului:

$$OM = \frac{l}{2}$$

Unghiul dintre apotema piramidei şi planul bazei:

$$\sphericalangle(\boldsymbol{VA}, (ABC)) = \widehat{VAO}$$

Secţiunea axială *(secţiunea care trece prin axa de simetrie a bazei - MN)*



Unghiul dintre apotema piramidei şi planul bazei:

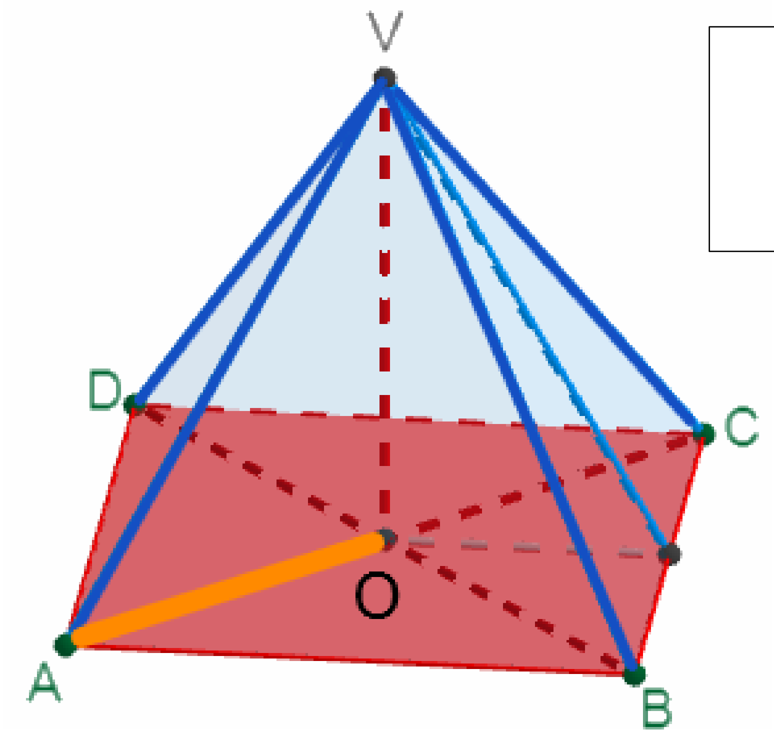
$$\sphericalangle(\boldsymbol{VM}, (ABC)) = \widehat{VAO}$$

Unghiul dintre apotema piramidei şi planul 'opus':

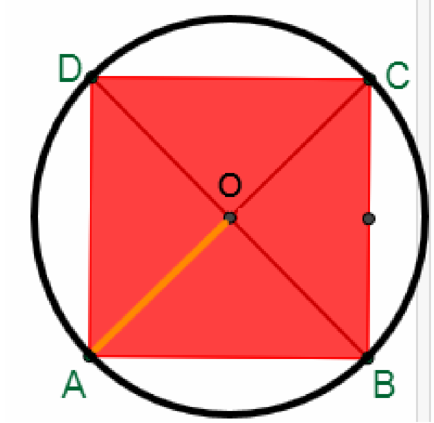
$$\sphericalangle(\boldsymbol{VM}, (VAD)) = \sphericalangle(\boldsymbol{VN}, (VBC)) = \widehat{MVN}$$

Unghiul dintre două plane 'opuse':

$$\sphericalangle((VBC), (VAD)) = \sphericalangle(\boldsymbol{VN}, \boldsymbol{VM}) = \widehat{MVN}$$



Piramida patrulateră regulată



4. *Muchia laterală a piramidei: VA*

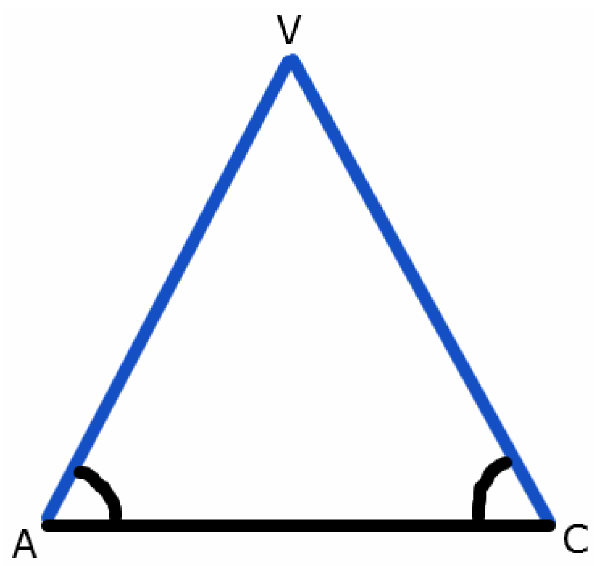
Proiecţia muchiei laterale a piramidei coincide cu *raza cercului circumscris pătratului*: AO

Centrul cercului circumscris pătratului este determinat de ***intersecţia diagonalelor.***

Raza cercului circumscris pătratului este jumătate din diagonală.

$$d = l\sqrt{2}$$

$$AO = \frac{d}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$



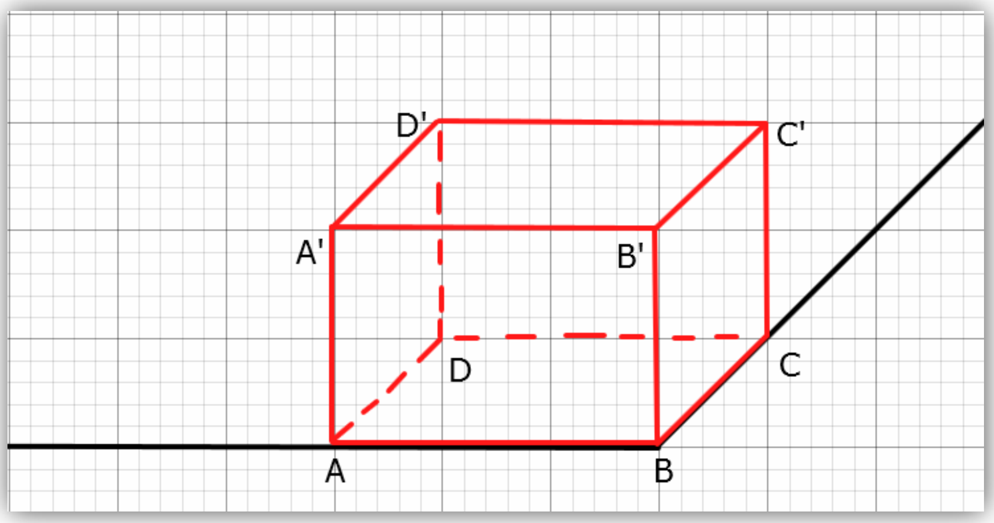
Secţiunea diagonală *(secţiunea care trece prin diagonala bazei - AC)*

Unghiul dintre muchia piramidei şi planul bazei:

$$\sphericalangle(\boldsymbol{VA}, (ABC)) = \widehat{VAC}$$

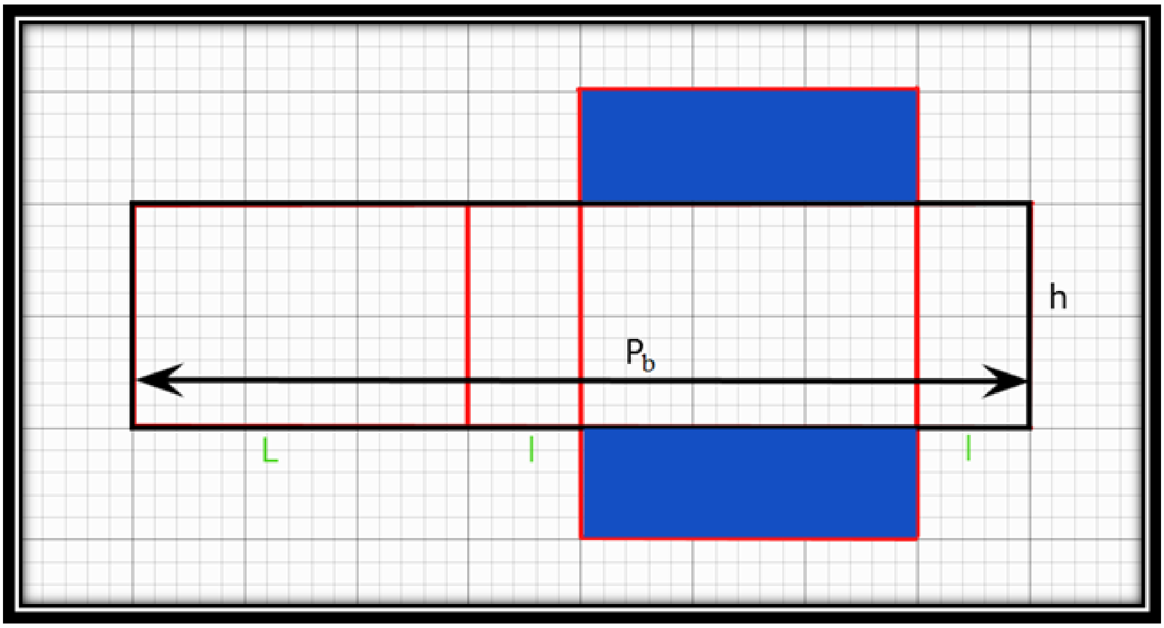
$$\sphericalangle(\boldsymbol{VC}, (ABC)) = \widehat{VCA}$$

Paralelipipedul dreptunghic: ABCDA'B'C'D'

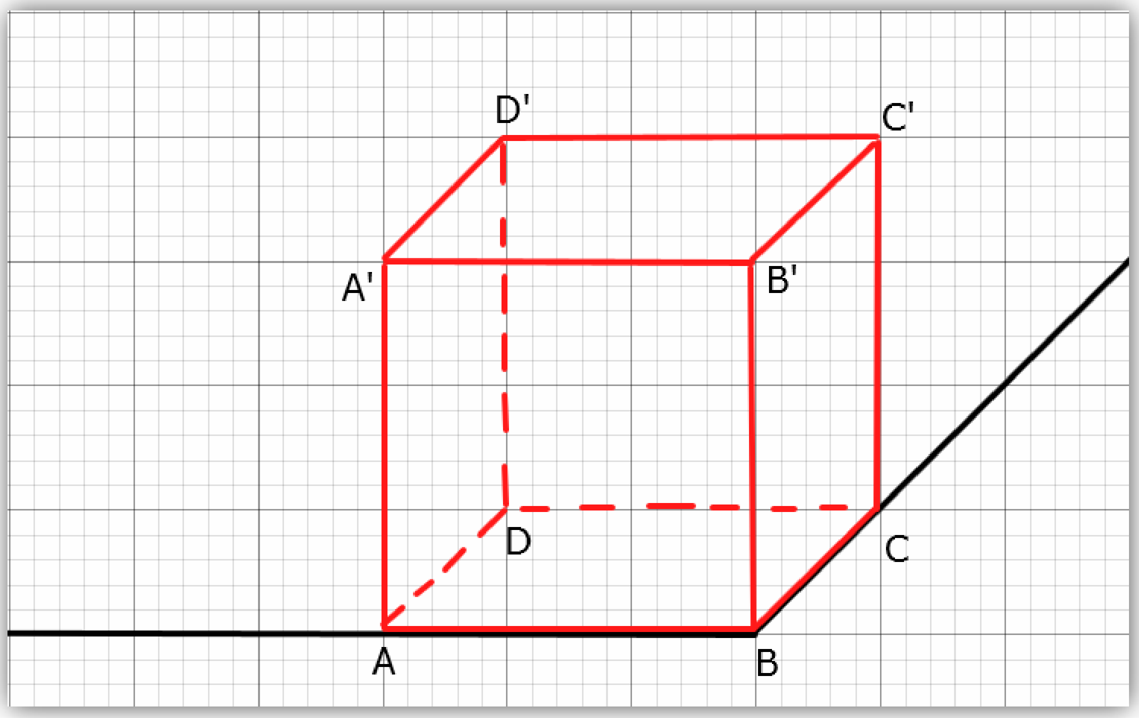


	2D	3D	
Dreptunghi	*arie*: $A = b * h$ $A = L * l$	*volum*: $\boxed{V = A_b * h}$ $V = L * l * h$	***Prisma dreptunghiulară*** **(paralelipiped dreptunghic)**
	diagonala: $d = \sqrt{b^2 + h^2}$ $d = \sqrt{L^2 + l^2}$	*diagonala*: $d = \sqrt{L^2 + l^2 + h^2}$	

$\boxed{A_t = 2A_b + A_l}$ $\boxed{A_l = P_b * h}$ $A_t = 2L * l + 2l * h + 2L * h$

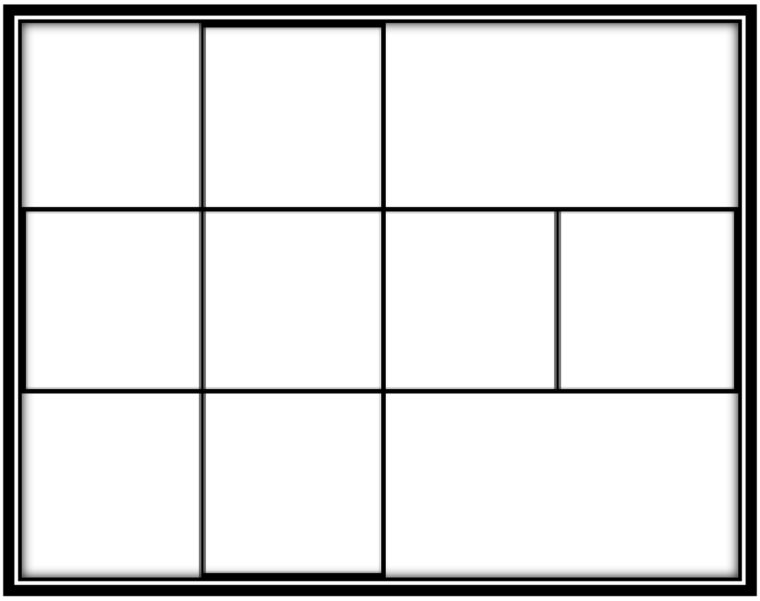


Cubul: ABCDA’B’C’D’

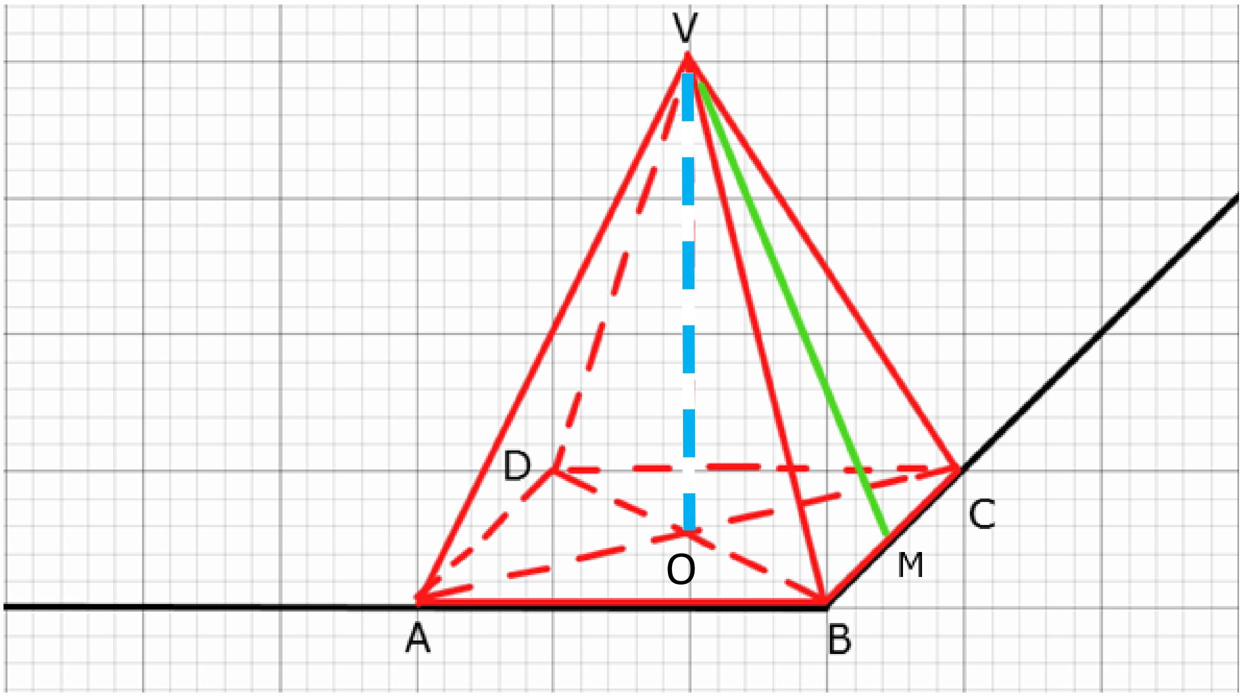


	2D	3D	
Pătrat	$\boldsymbol{aria}: A = l^2$	$\boldsymbol{volum}: V = l^3$	**Cub**
	$\boldsymbol{diagonala}$: $d = \sqrt{l^2 + l^2}$ $d = l\sqrt{2}$	$\boldsymbol{diagonala}$: $d = \sqrt{l^2 + l^2 + l^2}$ $d = l\sqrt{3}$	

$$A_t = 6A_b = 6l^2 \qquad A_l = 4A_b = 4l^2$$



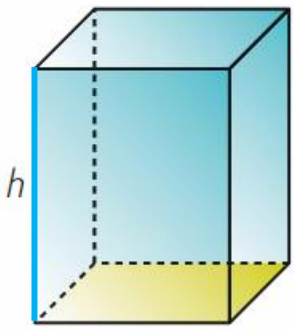
Piramida regulată: VABCD

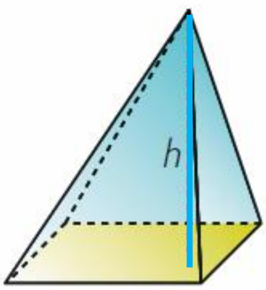


VM – apotema (înălțimea într – o față laterală)

	2D	3D	
Triunghi	aria: $A = \frac{b * h}{2}$	aria laterală: $A_l = \frac{P_b * a_p}{2}$	**Piramida**
	3D - Volume		
Prisma	$V = A_b * h$	$V = \frac{A_b * h}{3}$	**Piramida**

O piramidă are volumul egal cu o treime din volumul unei prisme cu aceeaşi bază şi aceeaşi înălţime!!!





Prof. Claudiu Tamaş

Formule arii şi volume

1. *Prisma*

Volumul: $V = A_b * h$

Aria laterală: $A_l = P_b * h$

Aria totală: $A_t = A_b + 2A_l$

2. *Cubul*

Volumul: $V = l^3$

Aria totală: $A_t = 6l^2$

Aria laterală: $A_l = 4l^2$

Diagonala: $d = l\sqrt{3}$

3. *Paralelipipedul dreptunghic*

Volumul: $V = L * l * h$

Aria totală: $A_t = 2A_b + A_l$

Aria bazei: $A_b = L * l$

Diagonala: $d = \sqrt{L^2 + l^2 + h^2}$

Aria laterală: $A_l = 2Lh + 2lh$

4. *Tetraedrul regulat*

Înălţimea piramidei: $h_p = \frac{l\sqrt{6}}{3}$

Aria bazei: $A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Aria laterală: $A_l = \frac{3l^2\sqrt{3}}{4}$

Aria totală: $A_t = l^2\sqrt{3}$

Volumul: $V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$

5. *Piramida*

Aria laterală: $A_l = \frac{P_b * a_p}{2}$

Aria totală: $A_t = A_b + A_l$

Volumul: $V = \frac{A_b * h}{3}$

Cuprins