Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală – Dâmboviţa

10 februarie 2024

CLASA A V-A

Subiectul 1. Aflaţi numerele naturale $\overline{abcd}$, dacă: $7 \cdot \left(\overline{abc} + 7\right) + 7^d = 2023$.

Subiectul 2. Există pătrate perfecte de forma: $6^m + 6^n$, unde $m, n \in \mathbb{N}$?

Subiectul 3. Comparaţi numerele: $a = 2^{33} + 11^{2000}$ şi $b = 3^{22} + 5^{3000}$.

Subiectul 4. Determinaţi numerele naturale x, y, ştiind că diferenţa dintre x şi y este egală cu 800, iar când împărţim pe x la y, obţinem câtul 20 şi un rest nenul.

Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală – Dâmboviţa

10 februarie 2024

CLASA A VI-A

Subiectul 1. Fie numerele naturale nenule a, b, c care verifică relaţia:

$$\frac{a}{12} = \frac{13}{b} = \frac{c}{13}.$$

Stabiliţi ce valori poate lua produsul $a \cdot b \cdot c$.

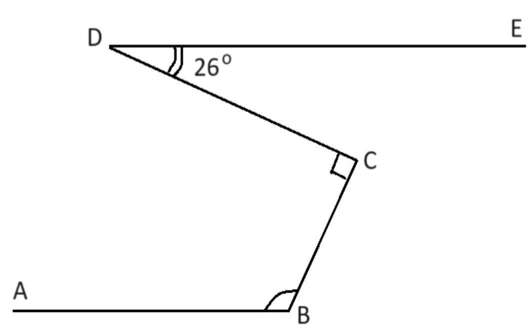
Subiectul 2. Determinați toate numerele naturale care are au produsul divizorilor egal cu 32^{11}.

Subiectul 3. Numerele 1331 şi 349 dau resturile 11, respectiv 13 la împărţirea cu un anumit număr natural. Aflaţi acel număr natural.

Subiectul 4. În figura alăturată, avem:

$AB \parallel DE$, $BC \perp CD$ şi $m(\measuredangle CDE) = 26^0$.

Calculaţi $m(\measuredangle ABC)$.



Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală – Dâmboviţa

10 februarie 2024

CLASA A VII-A

Subiectul 1. Aflaţi numerele $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, ştiind că:

$$x + \frac{1}{y} = 2\,,\, y + \frac{1}{z} = 3 \quad \text{și} \quad xyz = 1.$$

Subiectul 2. Calculaţi:

$$S = \left[\frac{1+\sqrt{1}}{1}\right] + \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right] + \left[\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{9+\sqrt{9}}{9}\right] + \left[\frac{10+\sqrt{10}}{10}\right].$$

Subiectul 3. Aflaţi $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât: $\sqrt{m-2} + \sqrt{2-n} = 2$.

Subiectul 4. Într-un patrulater $ABCD$, măsurile unghiurilor $\measuredangle ACD$, $\measuredangle DAC$, $\measuredangle ADC$ sunt direct proporţionale cu 1, 2, 3 şi de asemenea, măsurile unghiurilor $\measuredangle ACB$, $\measuredangle BAC$, $\measuredangle ABC$ sunt direct proporţionale cu 1, 2, 3.

Demonstraţi că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil şi circumscriptibil.

Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală – Dâmboviţa

10 februarie 2024

CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Fie $x, a, b, c > 0$ astfel încât numerele $ax + b,\ bx + c,\ cx + a$ sunt direct proporţionale cu numerele c, a, b. Demonstraţi că: $a = b = c$.

Subiectul 2. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât: $x^2 + y^2 = 6x + 8y$.
Demonstraţi că: $x \in [-2, 8]$ şi $y \in [-1, 9]$.

Subiectul 3. Câte numere raţionale r există în intervalul $[-1, 1]$ astfel încât să avem simultan: $11r \in \mathbb{Z}$ şi $13r \in \mathbb{Z}$?

Subiectul 4. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu $m(\measuredangle A) = 90^0$, se construiesc mijloacele E, F ale catetelor AB, respectiv AC şi înălţimea AD, cu $D \in (BC)$. Prin punctul E se ridică o perpendiculară pe planul (ABC) pe care se consideră un punct M. Arătaţi că $MD \perp DF$.

Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală – Dâmboviţa

10 februarie 2024

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Rezolvaţi în numere reale ecuaţia:

$$[x]+\frac{2023}{[x]}=\{x\}+\frac{2023}{\{x\}}\,.$$

Subiectul 2. Demonstraţi că orice număr natural $n \geq 14$ se poate scrie ca o sumă în care fiecare termen al sumei este egal cu 3 sau cu 8.

Subiectul 3. Fie $a,b,c>0$. Demonstraţi că:

$$\frac{a^2}{a^2+bc+ca}+\frac{b^2}{b^2+ca+ab}+\frac{c^2}{c^2+ab+bc}\geq 1\,.$$

Subiectul 4. Laturile BC, CA, AB ale unui triunghi ABC sunt paralele cu medianele din A_1, B_1, respectiv C_1 ale unui triunghi $A_1B_1C_1$. Demonstraţi că medianele din A, B, C ale triunghiului ABC sunt paralele cu laturile B_1C_1, C_1A_1, respectiv A_1B_1 ale $\Delta A_1B_1C_1$.

Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală – Dâmboviţa

10 februarie 2024

CLASA A X-A

Subiectul 1. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\lg\frac{x}{10}\cdot\lg\frac{x}{100}\cdot\lg\frac{x}{1000}\cdot\lg\frac{x}{10000}=-1.$$

Subiectul 2. Determinaţi numerele complexe z de modul 1, astfel încât: $|z^2+\bar{z}^2|=2.$

Subiectul 3. Fie $n\in\mathbb{N}$ şi considerăm ecuaţia: $(1+2^x)^n+(1+2^{-x})^n=8,\ x\in\mathbb{R}.$

a) Rezolvaţi ecuaţia dată, în cazul $n=1.$

b) Demonstraţi că ecuaţia dată nu are soluţii, dacă $n\geq 3.$

Subiectul 4. a) Demonstraţi că funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=x^3-4x$ nu este injectivă.

b) Fie $a\in[0,\infty)$. Demonstraţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+ax$ este injectivă.

Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală – Dâmboviţa

10 februarie 2024

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Calculaţi:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left\{\sqrt{n^2+n}\right\},$$

unde $\{\cdot\}$ este funcţia parte fracţionară.

Subiectul 2. Funcţia $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ satisface: $\left(f(x)\right)^2 + f(x) = x$, oricare ar fi $x > 0$. Calculaţi:

$$\alpha = \lim_{x\to 0} f(x) \quad \text{și} \quad \beta = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}.$$

Subiectul 3. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice antisimetrică, adică $A^t = -A$. Demonstraţi că:

$$\det(I_2 + A^2) \geq 0 \quad \text{și} \quad \det(I_2 - A^2) \geq 0.$$

Subiectul 4. a) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât: $A^4 = 0_2$. Demonstraţi că: $A^2 = 0_2$.

b) Există matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât: $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală – Dâmboviţa

10 februarie 2024

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Determinaţi toate funcţiile derivabile $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ cu proprietatea că funcţia $1/f$ este o primitivă a funcţiei f.

Subiectul 2. Calculaţi:

$$L=\lim_{n\to\infty}\int_0^{1/n}\frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}\,dx.$$

Subiectul 3. Fie G un grup cu proprietatea că $x^2=e$, oricare ar fi $x\in G$. Demonstraţi că:

a) G este grup comutativ;

b) dacă în plus G este finit, atunci el are 2^n elemente, pentru un anumit $n\in\mathbb{N}$.

Subiectul 4. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi H o submulţime a lui G, cu $H\neq\emptyset$ şi $H\neq G$.

Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) H este subgrup al lui G;

ii) pentru orice $x\in H$ şi $y\in G\setminus H$, avem: $xy\in G\setminus H$.

Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.